UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

"RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE RELACIÓN DE RECURRENCIA, BLOQUE NUMÉRICO Y FUNCIONES, BASADO EN EL MÉTODO HEURÍSTICO DE POLYA: GUÍA DIDÁCTICA PARA EL TERCERO DE BACHILLERATO".

Tesis previa a la obtención del Título de Magister en docencia de las Matemáticas

AUTORA:

Mgs. María Mercedes Lazo Carpio

C.I. 0102521077

DIRECTOR:

Mgs. César Augusto Trelles Zambrano

C.I. 0103757340

CUENCA-ECUADOR

2017

RESUMEN

El propósito fundamental de este trabajo es determinar el impacto de la aplicación del método de Polya en la resolución de problemas de recurrencia, en los estudiantes del Tercer año de Bachillerato General Unificado. La investigación es de carácter cuasiexperimental.

Se implementó una guía didáctica, la misma que se desarrolló conjuntamente con el involucramiento e inquietud del grupo experimental; lo que indujo abandonar el ambiente de clase pasiva y tradicional, a una clase activa y participativa en las cuales se conjugaron experiencias, generación de ideas, discusión de los argumentos, y caminos que les permite desarrollar habilidades de pensamiento como de razonamiento y argumentación.

La recolección de datos, se efectuó a través de un pretest y postest, en base de una encuesta con tres y cuatro preguntas abiertas conceptuales respectivamente y cuatro problemas de sucesiones, progresiones y relación de recurrencia, y mediante el Spss se realizó la tabulación de las cuatro categorías correspondientes a la variable independiente y dos categorías de la variable dependiente con sus respectivos indicadores.

Se evidenció en el pretest, que tanto los estudiantes del grupo de control y experimental cumplen de manera limitada con ciertos indicadores del método de Polya en la resolución de problemas, mientras que en el indicador análisis de la solución obtenida fue casi nula, posterior a la intervención la mayoría de estudiantes del grupo experimental demuestran que están en conocimiento de las tres primeras categorías.

Palabras Claves: Método de Polya, Resolución de Problemas, Relación de Recurrencia, Modelo Cognitivo, Trabajo Colaborativo.

ABSTRACT

The main purpose of this work is to determine the impact of the application of the method of Polya in solving problems of recurrence in Third year students General Unified Baccalaureate. The research is quasi-experimental character.

A tutorial, the same that was developed jointly with the involvement and concern of the experimental group was implemented, prompting leave the atmosphere of passive and traditional class, an active class, participatory in which experiences, generating ideas came together, discussion of the arguments, and paths that allows them to develop thinking skills such as reasoning and argumentation.

The data collection was carried out through a pretest and posttest, based on a survey with three and four conceptual open question respectively and four issues of inheritance, progressions and recurrence relation, and using SPSS tabulation of the four categories corresponding held the independent variable and two categories of the dependent variable with indicators.

It was evident in the pretest, both students in the control group and experimental meet a limited basis with certain indicators of the method of Polya in problem solving, while the analysis indicator solution obtained was almost zero, following the intervention most students in the experimental group show that they are aware of the first three categories.

Keywords: Polya Method, Problem Solving, Relationship Recurrence Model

Cognitive Collaborative Work.

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Universidad de Cuenca

Cláusulas de Propiedad Intelectual

MARÍA MERCEDES LAZO CARPIO, autora de la tesis "RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE RELACIÓN DE RECURRENCIA, BLOQUE NUMÉRICO Y FUNCIONES, BASADO EN EL MÉTODO HEURÍSTICO DE POLYA: GUÍA DIDÁCTICA PARA EL TERCERO DE BACHILLERATO", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autora.

Cuenca, febrero 17 de 2017.

Mercedes Lazo Carpio

MARÍA MERCEDES LAZO CARPIO

C.I: 0102521077

Universidad de Cuenca

Cláusulas de derechos de Autor

María Mercedes Lazo Carpio, autora de la tesis "RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE RELACIÓN DE RECURRENCIA, BLOQUE NUMÉRICO Y FUNCIONES, BASADO EN EL MÉTODO HEURÍSTICO DE POLYA: GUÍA DIDÁCTICA PARA EL TERCERO DE BACHILLERATO", reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de MAGISTER EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autora

Cuenca, febrero 17 de 2017.

Mercedes Lazo Carpio

MARÍA MERCEDES LAZO CARPIO

C.I: 0102521077

DEDICATORIA

Este trabajo de vital importancia en mi formación profesional y fortalecimiento de valores dedico a:

Mi Papi Juan, que se encuentra en el infinito celestial

Mercedes María mi madre, que es ejemplo de fortaleza y abnegación

Jaime Enrique, mi hermano el más pequeño por su apoyo incondicional

Freddy Ramsés, mi esposo por su comprensión a la n-ésima potencia.

María Mercedes

AGRADECIMIENTO

Gracias por proveerme de valor y coraje mi SEÑOR JESÚS

Magister César Trelles que la energía que irradia le acompañe por siempre, gracias mil por su guía en la elaboración de este trabajo

A la Unidad Educativa Chordeleg por abrir las puertas y brindar una oportunidad a los estudiantes en su formación integral

Angélica por compartir momentos de alegría y tristeza en las clases de la maestría

De manera especial agradezco a mis queridos estudiantes del Tercero “B”, por involucrarse en este mi sueño

y

A todas aquellas personas que de una u otra manera confiaron en mí.

INTRODUCCIÓN

El bachiller ecuatoriano que pretende ingresar a las universidades públicas debe rendir una prueba denominada Ser Bachiller, la misma evalúa habilidades vinculadas con el razonamiento abstracto, el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos; por lo que, surge la siguiente pregunta ¿De qué manera aportaría el uso del método de Polya en la resolución de problemas de relación de recurrencia?.

La Unidad Educativa "Chordeleg" participó con 149 estudiantes en el año lectivo 2014-2015; de los cuales, 69 estudiantes presentaron dificultades en el razonamiento matemático, lo que correspondió al 46,305% de la población tomada. Estos datos, fueron obtenidos estadísticamente de los resultados enviados por el Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

Por lo que, es primordial determinar la estrategia que coadyuve a resolver problemas matemáticos y de la vida cotidiana. Ante ello, Ardón (2012) manifiesta: "El método de George Polya se fundamenta en cuatro fases: Comprender el problema, Concebir un plan, Ejecutar el plan y Examinar la solución obtenida" (p.12). Lo cual, de manera implícita, fortalecerá: el trabajo colaborativo, la argumentación, la validación y mantendrá una estrecha vinculación con el modelo pedagógico cognitivo.

Con el propósito de guiar y potenciar las habilidades de resolver problemas matemáticos y con el fin ulterior de participar en la prueba Ser Bachiller; en los tiempos establecidos, se aplicó un diagnóstico a través de pretest de conocimientos previos, sobre la resolución de problemas de relación de recurrencia, con el uso de la guía didáctica basada en los cuatro pasos de Polya para resolver problemas de relación de recurrencia y finalmente, se evidenció el impacto de este método en el grupo experimental a través del postest.

La Unidad Educativa “Chordeleg”, es una institución pública, ubicada en el Cantón Chordeleg, que brinda oportunidad de formación integral a estudiantes domiciliados en los cantones de: Chordeleg, Gualaceo y Sigsig y además, oferta el Programa Diploma, de la Organización del Bachillerato Internacional, para los estudiantes cuyas edades oscilan entre los 16-18 años, basado en la metodología experiencial, en donde el estudiante construye su propio conocimiento en contacto con miembros de otras comunidades educativas nacionales e internacionales.

La población considerada, estaba constituida por 165 estudiantes pertenecientes a los terceros años de Bachillerato General Unificado, con una muestra de 80 estudiantes, que correspondieron al grupo de control y experimental, así como también se tomó una muestra de 2 docentes de un total de 12 maestros del área de Matemática.

El enfoque que se aplicó fue mixto cuantitativo y cualitativo, con diseño cuasiexperimental. El nivel fue de correlación, ya que buscó una vinculación entre el método de Polya y la resolución de problemas de relación de recurrencia, en base de pretest y postest.

Las investigaciones acerca de la aplicación del método de Polya en la resolución de problemas matemáticos en diferentes temáticas, se ha realizado desde tiempos anteriores; así por ejemplo, se consideró el trabajo efectuado por la Escuela Superior Politécnica del Litoral de Ecuador, y que lo aplicó en un Colegio Técnico de la ciudad de Guayaquil; con respecto la enseñanza de las funciones exponenciales y logarítmicas; en donde los estudiantes del primer año han adquirido los conocimientos, sin plantearse preguntarse; tales como: ¿por qué? y ¿para qué?, es decir, no existió ningún proceso de análisis del enunciado del problema, para determinar características específicas en la categoría comprender el problema; por otro lado, lo aprendido no se contextualizó en la aplicación de los problemas cotidianos. Ante ello, han elaborado un taller pedagógico, basado en problemas con datos reales y verificables; lo cual ha motivado a los estudiantes a participar activamente, generando ideas, discusiones; pero sobretodo concluyendo, que es necesario tener un método para resolver diversos de vida real; demostrando así, que la Matemática es una actividad y no un conjunto codificado de números.

La institución Educativa Máximo Mercado de Colombia, ha evidenciado en el año de 2009, a través de las pruebas SABER que los estudiantes de séptimo grado de Educación Básica, han presentado dificultades en la resolución de problemas matemáticos, ya que ellos han dado respuesta a situaciones conocidas y rutinarias, pero al encontrarse con procesos y hechos nuevos son incapaces de dar solución a pesar de ser problemas sencillos ; por lo que, han ejecutado una intervención basada en categorías de análisis tales como: comprensión, concepción, ejecución de un plan y visión retrospectiva de los problemas; así como, también se han centrado en la motivación; para lo cual, han trabajado intensamente en la parte comprensiva, haciendo conciencia de que cada palabra de un enunciado tiene significado y a partir de ello, los estudiantes se han interesado por: analizar, comparar, argumentar y verificar cada paso efectuado; corrigiendo los errores cometidos, por lo que un 48,57% de estudiantes han aplicado el proceso que debieron seguir en cada problema para llegar a la respuesta.

En el presente trabajo de intervención, el grupo experimental demostró de manera notable la aplicación del método heurístico de Polya, en las categorías: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida; ya que en el postest, un porcentaje alto de estudiantes, argumentaron cada proceso efectuado y corrigieron los resultados no coherentes. En tanto, que en la variable dependiente, en las categorías: coordinación de experiencias y conocimientos, un alto número de estudiantes lo cumplieron de manera satisfactoria.

Las dificultades para desarrollar el método heurístico de Polya, están relacionadas con el excesivo número de estudiantes y la escasa predisposición para resolver problemas matemáticos.

Capítulo I

1.1 Bases teóricas

Todo aporte tiene una historia; igualmente, resolver problemas matemáticos posee una trayectoria; por ello es indispensable considerar determinados criterios, en cuanto a modelos pedagógicos; los cuales, aportarán de manera preponderante en el desarrollo de este trabajo; ya que la metodología que se aplique para llevar a cabo el aprendizaje de la resolución de problemas, confluye en investigaciones de varios psicólogos, entre ellos se menciona: Thorndike, Jhon Dewey, Skinner, Declory, Montesori, Novak, Ausubel, etc.

1.1.1 Modelo Pedagógico Activista o Escuela Nueva.

Las teorías del activismo experimental y maduracionista, sostienen que el aprendizaje se da mediante la experimentación. La aplicación de conductas para resolver problemas, tal como el aprendizaje, es un proceso de desarrollo espontáneo y singular, de todas las potencialidades de cada estudiante. Dewey (citado por Ruiz, 2013) piensa que “La educación es un desarrollo que procede desde adentro”. Esto implica que en cada uno de los educandos aflora todo lo que ya tiene integrado a su persona, por lo tanto, de él mismo surgirán las necesidades, las que serán resueltas de manera colaborativa conjuntamente con el maestro.

Para este modelo, el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje es el educando, ya que es quien construye su aprendizaje en base de la experimentación; para ello, debe manipular los materiales u objetos que son proporcionados por los docentes, así como los ambientes deben ser innovadores y agradables; lo que garantiza la jerarquía del aprendizaje, de lo simple a lo complicado, de lo concreto a lo abstracto; es decir, mientras el estudiante experimenta y manipula, desarrolla sus sentidos; lo que provoca un aprendizaje significativo.

La planificación debe ser, en función de los intereses de los educandos, ya que mientras se utilice estrategias activas, se potenciará la acción; lo que permitirá desarrollar conductas para resolver situaciones nuevas. Aquí, el docente tiene un rol importante de guía o facilitador del proceso de enseñanza-aprendizaje. Decroly (citado por Zubiría, 2006) dice que "Se aprende haciendo" esto quiere decir que el aprendiz hace uso de toda su creatividad y experiencia para resolver una situación nueva, en base a los conocimientos y experiencias anteriores. Zubiría (1999) manifiesta: "La Educación Nueva prepara al niño no sólo al futuro ciudadano capaz de cumplir sus deberes hacia su prójimo, su nación y la humanidad en su conjunto, sino también al ser humano, consciente de su dignidad de hombre" (p.24). El estudiante no debe desarrollar únicamente habilidades de conocimiento, sino también de actitudes; pues eso marca la diferencia y lo sitúa como un ser humano íntegro respetuoso de las ideas ajenas, predispuesto a resolver los problemas de manera pacífica.

El objetivo innegable de este modelo, es que el docente apoya y motiva a los educandos para que todo aquello que aprendan a través de la experimentación en trabajo individual y/o colaborativo, impulse y desarrolle una destreza más, como es la comunicación; ya que todos aquellos momentos vividos se deben debatir; conversar de manera libre, fundamentado específicamente en la acción.

1.1.2 Modelo Pedagógico Cognitivo.

Éste se basa en la teoría de la psicología genética, puesto que busca el predominio del desarrollo del pensamiento y la creatividad. Para ello es necesario que exista interacción recíproca entre el comportamiento personal y el determinismo del medio ambiente, ya que se tiende al equilibrio; el punto de partida son los estudios realizados por Piaget, según su criterio, es cotidiano pasar de un grado de menor conocimiento a otro de mayor conocimiento. A ello se debe sumar lo que Rivero (2014) expresa: “En cada momento de su desarrollo el sujeto está dotado de un conjunto de capacidades de razonamiento que pone en funcionamiento al abordar cualquier tarea cognitiva, sea cual fuere su contenido específico” (p.10). Entonces, el aprendizaje está íntimamente vinculado a los cambios que se den en las estructuras cognitivas, es decir, el aprendizaje es un proceso que se forma de manera interna, activa e individual. Por lo que los seguidores de esta teoría afirman que el estudiante alcanzará su meta educativa paulatinamente e individualmente, lo que dependerá del desarrollo intelectual a la que llegue cada persona y en base de las necesidades y condiciones del entorno.

Almeida (2012) dice: “Piaget no formuló propiamente una teoría del aprendizaje; sus esfuerzos estuvieron concentrados en desentrañar el carácter y la naturaleza de la formación de las estructuras con las que interpretamos el mundo” (p.4).

Este modelo pedagógico sostiene que el aprendizaje se da por descubrimiento, lo cual ubica al estudiante de cara al desafío con el propósito de resolver situaciones problemáticas de la vida cotidiana, lo que permite la transferencia del aprendizaje, Bruner (citado por Posso, 2012) manifiesta que “El descubrimiento consiste en transformar o reorganizar la evidencia de manera de poder ver más allá de ella”. Esto implica que cualquier problema real se vincule con la parte conceptual y simbólica, promoviendo de esta manera: la transferencia, la contrastación, el análisis. Lo que permite a cada estudiante determinar los aspectos importantes a considerar, para resolver hechos y situaciones que conlleven de manera implícita, una planificación de estrategias de resolución, refuerzo y retroalimentación, en definitiva, es ir de lo concreto a lo abstracto.

El aporte de David Ausubel, no puede quedar relegado en este trabajo, ya que considera, que los conocimientos previos integrados a cada estudiante, es el cimiento para continuar con el proceso de aprendizaje. Por ello es primario considerar lo que Moreira (1997) indica: “El aprendizaje es el proceso a través del cual una nueva información se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva con la estructura cognitiva de la persona que aprende” (p.2). Por lo que, el aprendizaje será significativo en el momento que exista una conexión entre los conocimientos ya adquiridos y lo que se conoce acerca del nuevo tema a tratarse, por lo que, es necesario que la asimilación lleve un proceso de jerarquización, ya que el mundo social, físico y matemático; es representado a partir de estructuras mentales. Siendo crucial entender, que cuando se refiere a las estructuras cognitivas de los educandos se refiere a los conceptos, ideas y organización que poseen acerca del tema de estudio.

Joseph Novak contribuye al modelo pedagógico cognitivista, ya que se fundamenta en la teoría constructivista, y sostiene que el aprendizaje es una construcción que se produce a través de los desequilibrios o conflictos cognitivos, pues se modifican los esquemas estructurales del que aprende. Por otra parte Novak (citado por Moreira, 1997) sostiene que “La educación es una acción para cambiar significados (pensar) y sentimientos entre aprendiz y profesor”. El mismo hecho de tener la condición de seres humanos, en el proceso educativo de manera implícita se da una acción de intercambio de: pensamientos, sentimientos, actitudes, valores, habilidades entre estudiante y profesor y no únicamente hace referencia a la transferencia de conocimientos.

Finalmente, uno de los autores que influyó en el modelo cognitivista fue Feuerstein con su teoría de aprendizaje mediado, la misma consiste en problematizar situaciones de aprendizaje, buscando estrategias para resolverlos de la mejor manera, para ello se provoca desequilibrios cognitivos, generando de esta forma la necesidad de: pensar, investigar, reflexionar, conceptualizar y debatir. Con el propósito ulterior de mejorar la estructura cognitiva, Feuerstein concibe al estudiante como un ser predispuesto al cambio, lo cual le abrirá espacio para nuevas oportunidades en el proceso de aprendizaje. Esto, aportará en su desempeño en la sociedad. En el caso de que el estudiante se negara a receptar las recomendaciones para el cambio, es imprescindible recurrir a estrategias de tal forma que se llegue a consensos de manera reflexiva venciendo las barreras o esquemas que parecen insuperables.

El fundamento de la teoría de la modificabilidad humana es posible gracias a la intervención de un mediador, el cual se preocupa de dirigir y optimizar el desarrollo de la capacidad intelectual. Por lo que, el rol del maestro en este modelo es de guía, quien creará ambientes agradables y muy motivadores para que los estudiantes sean artífices de su propio aprendizaje, conectando conocimientos previos con los nuevos, en base de la manipulación de objetos concretos para luego vincularlos con conceptos y simbologías, dando de esta manera sentido a todo lo que aprende. Entonces, el educando es el eje motor del proceso de aprendizaje, ya que es quién debe plantear caminos para resolver situaciones diferentes a las experimentadas dentro del aula, es decir, tiene independencia para construir su propio aprendizaje.

1.1.3 Modelo Pedagógico Socio Crítico.

Este modelo enfatiza que el educando tiene que relacionarse con su medio, entonces, Amate (2001) considera: “El modelo parte de una educación con la función de preparar a los ciudadanos en una cultura democrática que a la vez que destaca la vida personal y social, asegura un orden social democrático y productivo" (p.56).

De acuerdo a Dewey (citado por Torres, 2015) propone que "la escuela se organice como una democracia en miniatura, en la que los alumnos participan en el desarrollo del sistema social y a través de la experiencia, aprenden gradualmente cómo aplicar el método científico para mejorar la sociedad humana".

Así, se pretende desarrollar las potencialidades para alcanzar la libertad y la identidad; y de esta forma construir una nueva sociedad. Benítez (2012) expresa: "Este modelo espera formar personas pensantes, críticas, creativas y en constante búsqueda de alternativas divergentes y éticas, para la resolución de los problemas que afecten a la sociedad" (p.34). En virtud de ello, los problemas de aprendizaje se vincularán con los problemas de la vida cotidiana, y a la luz de la ciencia se buscarán las soluciones a la problemática social, es decir, se privilegiará la experiencia de los estudiantes, de manera inmediata lo que los ubica en la realidad contextualizada.

En este modelo, el rol del docente es de facilitador o guía del aprendizaje. Es quien provoca: la reflexión, acción, y la transformación; y orienta para que las experiencias se las exprese y los intereses se los confronte con la realidad existente. Entonces, la acción del docente tiene un propósito intencionado y se encarga de organizar, planificar los contenidos; promoviendo la participación en actividades de problematización intelectual, así como de ejercitación constante propiciando debates. Por otra parte, el docente sabe cuándo debe dejar solo al estudiante, para que él mismo ocupe su propio espacio, pero sin perder de vista las diferencias individuales de cada estudiante.

La comunicación con los estudiantes es de manera muy fluida y horizontal, escuchando las necesidades de cada uno; para ello aplicará la metodología del trabajo colaborativo. Todo lo mencionado anteriormente influye en la construcción del aprendizaje.

El estudiante tiene un perfil de desempeño activo, puesto que está en la facilidad de identificar qué hechos, actitudes y reflexiones se pueden considerar como válidos, lo que, propiciará la toma de decisión más adecuada para resolver los problemas sociales y matemáticos. A ello hay que adicionar que la comunicación que se mantiene entre docente y estudiante es fluida y bidireccional.

Cuando un estudiante resuelve un problema matemático se da paso a un nuevo conocimiento, ante ello Fontalvo (2010) indica: "Entre una de sus fortalezas es su habilidad para investigar, para ir más allá de lo que se le representa y no quedarse con lo que tiene o con lo que le brinda el profesor" (p.16).

Por otro lado, el alumno debe estar en la capacidad de descubrir su realidad en base de actividades diversas que no están previamente programadas, pero sí deben ser muy flexibles ya que se sujetarán a los cambios que se da en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, el estudiante es quien tendrá la satisfacción de descubrir los hechos, acontecimientos por sí mismo, en contacto e interrelación con el medio en el que se desenvuelve.

Todo proceso de enseñanza-aprendizaje tiene también su proceso de evaluación, por lo que en este modelo se propende a una evaluación dinámica y compartida, ya que el aprendizaje surge al momento de interrelacionarse con estudiantes que tienen mayor experticia, lo que provoca nuevos conocimientos, de esta manera se fortalece la auto evaluación y coevaluación; ya que el trabajo que se desempeña tiene como propósito potenciar el atributo ser solidario. Vinueza (2012) expresa: "En este modelo, la evaluación tiene una función auto-formativa para las personas o colectivos que participan en ella. Proporciona un carácter dimensionador a las realidades sometidas a su acción” (p.33).

Finalmente, el Ministerio de Educación se fundamenta en el modelo de la Pedagogía Crítica. Para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, el Ministerio de Educación (2012a) considera: “Al estudiante como el protagonista principal del aprendizaje, dentro de diferentes estructuras metodológicas, con predominio de las vías cognitivistas y constructivistas” (p.6). Entonces, el estudiante en base de sus estructuras mentales, experiencias, su interrelación con el medio y consciencia del cuidado del medio ambiente debe dar primacía a la construcción de su aprendizaje.

1.2 Conceptos de problema matemático y resolución de problema de relación de recurrencia.

A medida que se trabaja en la resolución de problemas matemáticos, en muchas ocasiones se presentan preguntas de parte de los educandos, que deben recibir respuestas de inmediato, en virtud de ello se tiene:

1.2.1 Concepto de problema matemático.

De acuerdo a innumerables investigaciones, el concepto de problema matemático aún sigue en discusión, ya que algunos autores consideran que un ejercicio puede constituirse en un problema, ello dependerá de los conocimientos que se requieran para su resolución; es evidente que esto depende de la estrategia que emplee el estudiante, mientras, que otros autores manifiestan que un problema matemático se debe resolver en base de una planificación en la cual se vigorice los algoritmos, procesos matemáticos así como el razonamiento lógico y abstracto.

Kilpatrick (citado por Ramírez, 2011) expresa, “Problema matemático es una definición en la que se debe alcanzar una meta, pero en la cual está bloqueada la ruta directa”. Un problema matemático es una situación que induce alcanzar un objetivo definido, pero la manera como se lo haga está sujeta a una serie de impedimentos, es decir, no se realizará de manera inmediata, puesto que se debe ejecutar procesos matemáticos para llegar a la meta, en muchas ocasiones se cometerán errores hasta visualizar la solución, pero de esas equivocaciones se aprende.

Nieto (2005) indica: “Un problema es un obstáculo arrojado ante nuestra inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta” (p.37). Problema matemático es sinónimo de conflicto; en el cual el estudiante está frente a una oportunidad de poner en juego toda su experticia, para afrontar esta situación de manera satisfactoria.

La conceptualización de problema matemático, Webster (citado por Rodrígüez, 2007) dice, “Es algo que precisa ser realizado o que requiere la realización de algo”, por más sencillo que sea el procedimiento para resolver una situación que derive en un problema, siempre se requiere de una estrategia o camino para resolverlo.

Alonso (2012) define: “Para que un problema matemático sea totalmente útil a los efectos de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de los mismos, debe mostrar la estructura del problema y el tipo de información que brinda” (p. 43). En un problema implícitamente, viene el proceso que se debe aplicar para arribar a la solución. Así como los datos, incógnitas, etc., lo crucial, es prepararse para hacer uso de la: creatividad, conocimientos previos y estrategias, con la finalidad de comprender el enunciado y planificar el camino para resolverlo.

Pérez & Gardey (2013) manifiestan: “Problema matemático es una incógnita acerca de una cierta entidad matemática que debe resolverse a partir de otra entidad del mismo tipo que hay que descubrir” (p.1). En base de datos conocidos que se encuentran descritos en el enunciado, se debe determinar la incógnita, a través de procesos ordenados, lógicos y argumentados.

Según Pólya, (citado por Fuentes, 2008) expresa: “Un problema, es el uso de problemas o proyectos difíciles, que requieren de una habilidad intelectual, por medio de los cuáles los estudiantes aprenden a pensar matemáticamente”. Ante un problema matemático los estudiantes deben concentrarse y buscar el camino para resolverlo; haciendo uso de los algoritmos y procesos matemáticos conocidos por ellos.

En base de los diversos conceptos de problema matemático, se deduce entre líneas que, en el enunciado que está escrito en lenguaje natural, se contempla todo lo que se debe entender y aplicar, pero sin olvidar que cada problema es diferente y por ello, es necesario contar con múltiples estrategias para resolverlos de manera satisfactoria.

1.2.2 Resolución de problema de relación de recurrencia.

Es imprescindible considerar criterios acerca de la resolución de problemas, que en estos últimos años han tomado mucha relevancia en el estudio de la Matemática, pues en innumerables ocasiones durante el proceso de enseñanza-aprendizaje a pesar de estar establecido dentro de la malla curricular, se trata de manera superficial, y, más se hace hincapié al desarrollo de ejercicios, lo que contribuye a la mecanización y memorización; desplazando de esta modo aquellas actividades que desarrollan: el pensamiento lógico, la inducción y la creatividad del estudiante, pero específicamente de la resolución de problemas de recurrencia.

Nieto (2005) indica: “La resolución de problemas es la piedra angular de la matemática escolar. Sin la habilidad para resolver problemas, la utilidad y el poder de las ideas matemáticas, su conocimiento y habilidades, están severamente limitados" (p.38). En la resolución de problemas se vierte todas las habilidades tanto de conocimiento como de procesos. Es el momento en donde se evidencian el desempeño de éstas potencialidades de los estudiantes.

Salazar (2006) manifiesta: "Resolver un problema de relación de recurrencia consiste en determinar una fórmula explícita (cerrada) para el término general a_n , es decir una función no recursiva de n" (p.3). El estudiante en función de los datos conocidos debe establecer una fórmula para determinar el término que permitirá obtener el valor requerido, en base de los datos iniciales.

Fumero (2007) dice: "Resolver un problema de recurrencia es hallar un valor determinado de una sucesión la misma que depende del término de posición" (p.12). Cuando se resuelve un problema de recurrencia, considerar cualquier término no aporta, lo que se debe contemplar es la ubicación de éste, en base de las condiciones de frontera.

Para plantear y resolver un problema de relación de recurrencia, se debe expresar la ecuación y para resolverla, se utilizará aquellos valores que ya vienen establecidos para todo entero n ≥ n_0 ; por lo que, es crucial entender que cada término depende del que le precede, lo que marca la diferencia con las sucesiones (Vílchez, 2009).

Hernández (2012) indica que: "Resolver un problema de recurrencia consiste en establecer un término en base del que antecede, para cualquier n entero mayor o igual que un entero inicial, para ello se utiliza los primeros términos conocidos como condiciones iniciales del problema" (p. 13).

En el enunciado de los problemas de recurrencia se necesita de todos los elementos a ser considerados, al momento de plantear la ecuación de recurrencia. Es decir, se debe contar con datos suficientes y necesarios para proceder a resolverla.

Vílchez (2009) expresa: “Resolver problemas de relaciones de recurrencia por su misma naturaleza, ponen de manifiesto la necesidad de determinar de forma explícita mediante algún método o técnica, el término n-ésimo de la sucesión que representan” (p. 7). Los problemas de recurrencia se resolverán en la medida que se determine el valor inicial y además se cuente con un proceso para seguir.

Rosen (2010) expresa: “Resolver un problema de recurrencia es determinar una expresión del tipo $a_n = f(n)$ en la que el término general depende solo de la posición que ocupa y no de los anteriores, es necesario conocer las condiciones iniciales” (p. 7).

La resolución de problemas en las diferentes asignaturas se fundamenta en conocimientos adquiridos, razonamiento y experiencia que cada estudiante posee, por ello de acuerdo a Klever (2012) expresa: “La resolución de problemas se refiere a la coordinación de experiencias previas, conocimiento e intuición, en un esfuerzo para encontrar una solución que no se conoce” (p. 8).

Fundamentada, en lo que antecede, se deduce que los problemas matemáticos de relación de recurrencia se plantean y se resuelven siguiendo un camino o estrategia. Sin embargo, un estudiante convierte un problema de menor grado de dificultad en otro más difícil, cuando no se tiende puentes entre los conocimientos previos y los nuevos, así como tampoco relaciona con el medio; es decir, no contextualizan y peor ubica ese problema en circunstancias ajenas a ese contexto. Por ello, es primordial potenciar el involucramiento del estudiante en el aprendizaje, en base de una planificación acorde a las necesidades y experiencias de los dicentes. Esto es un principio fundamental del constructivismo (Crawford, 2004).

La resolución de problemas de relación de recurrencia está íntimamente ligada a la heurística, por lo que es primordial establecer el uso de este recurso para llegar a obtener resultados lógicos, dependiendo de la temática a tratar.

1.3 Trabajo colaborativo

Además, de los diferentes criterios para resolver un problema matemático, es fundamental la estrategia del trabajo colaborativo, en la cual todos los miembros del equipo deben involucrarse en: actividades, tareas, resolución de problemas, etc.; para arribar a un aprendizaje significativo; cada miembro del grupo tendrá roles que cumplir, de esta forma se potencia o fortalece el grado de eficacia, eficiencia y ética; pero sobre todo, de solidaridad, respeto y tolerancia a las ideas ajenas.

En el trabajo colaborativo cada uno de los integrantes deben generar ideas y reflexionar a través de las discusiones fundamentadas en argumentos que poseen un soporte científico, lo que garantizará llegar a conclusiones satisfactorias. Es decir, se debe fomentar la interacción para que los estudiantes que posiblemente presentan dificultades para interiorizar conceptos y procesos, se sientan estimulados y motivados a aprender, y que en el transcurso del tiempo se conviertan en líderes, en los diferentes momentos de interrelación social. En virtud de ello Perkins (1997) sostiene: “La enseñanza se lo debe hacer de manera colaborativa, pues ello permite compartir conocimientos habilidades y actitudes al momento de resolver problemas” (p. 4).

1.4 Clase invertida o flipedd classroom

Esta es una estrategia para lograr que el estudiante contribuya en su aprendizaje. Permitiendo alejarse de la clase tradicional en donde el maestro es el centro. Más bien aquí, se combinan las habilidades desarrolladas en el trabajo colaborativo y el liderazgo del docente, ya que las tareas de casa justamente se lo harán en casa con el involucramiento de la familia, puesto que el docente debe enviar material muy atractivo y activo, que cubra las necesidades del estudiante y lo puedan aplicar para cambiar su entorno de manera positiva y en un colectivo solidario.

El papel del docente es de crear videos, diapositivas, dramatizaciones, etc., acerca del marco teórico y los estudiantes lo analizarán en casa cuantas veces sea necesario; luego en clase en primera instancia se aclarará las dudas sobre la parte conceptual y se cubrirá algunas debilidades, posterior a ello en la construcción del conocimiento se resolverá problemas, proporcionando de esta manera mayor importancia a los procesos, con lo cual se pretende optimizar el tiempo tanto en la calidad como en duración.

Rangel (2016) expresa: “El modelo de aula invertida abarca todas las fases del ciclo de aprendizaje (la dimensión cognitiva de la taxonomía de Bloom)” (p. 9).

1.5 El método heurístico de Polya y sus características

La resolución de un problema por más elemental que sea, requiere seguir un camino o una estrategia para llegar a obtener el resultado, entonces, es de vital importancia la aplicación de las diferentes heurísticas. Rodríguez (2006) manifiesta “La heurística tiene que ver con operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas” (p. 53).

En el proceso de enseñanza-aprendizaje, es primordial que el estudiante construya su propio conocimiento, pero ello, no se logra únicamente con la interiorización de conceptos matemáticos y la resolución de ejercicios, sino que, es necesario la puesta en práctica de la creatividad, la imaginación y el juego de ideas, en virtud de ello, se puede apoyar en el método de George Pólya, que consta de cuatro etapas o fases para resolver un problema, Nieto (2005) manifiesta: “Comprender el problema, Concebir un plan, Ejecutar el plan y Examinar la solución obtenida” (p. 5).

Pólya no solo fue un filósofo, sino matemático y literato, desarrolló muchas habilidades para la Matemática y sobre todo para resolver problemas y en su obra How to solve it, que traducido significa ¿Cómo plantear y resolver problemas?, plasma de manera explícita las cuatro fases. Cabe recalcar que la conceptualización del marco teórico de Pólya ha servido de base para varios estudios sobre la resolución de problemas, pero cada investigador matemático le da la perspectiva de acuerdo a sus concepciones, sin embargo, al final concluyen que cuando un estudiante se encuentra frente a un problema concerniente a la Matemática o de la vida cotidiana, es necesario desempeñarse en habilidades de pensamiento tales como de: raciocinio, reflexión y verificación.

Pólya marca la diferencia entre las heurísticas para resolver problemas, ya que combina la resolución de ejercicios y específicamente de problemas y se apoya en las cuatro categorías o fases con sus respectivas preguntas, entonces, Polya (citado por Kléver, 2012) expresa:

Comprender el problema: ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la variable?, ¿Hace un diagrama con los datos y variable correspondientes?.

Concebir un plan: ¿Relaciona datos y variables?, ¿Traduce las oraciones del enunciado al lenguaje algebraico?, ¿Vincula los conceptos y habilidades con los conocimientos previos?, y ¿Expresa el enunciado del problema de otra manera?.

Ejecutar el plan: ¿Emplea la estrategia planificada para la solución del problema?, ¿Argumenta el uso de los algoritmos en cada operación realizada?.

Examinar la solución obtenida: ¿Verifica los resultados?, ¿Analiza si el resultado obtenido es coherente con el enunciado? Y ¿Sugiere alternativas diversas para resolver el mismo problema?.

1.6 Relación entre el modelo pedagógico cognitivo y el método heurístico de Polya

¿Cuál es la variable? ¿Cuáles son los datos? ¿Hace un diagrama con los datos y variable correspondientes?

La primera categoría del método heurístico de Polya hace referencia a las estructuras cognitivas, ya que para comprender el problema inicialmente se debe realizar una lectura comprensiva, las veces que sea necesario, luego es fundamental responder a preguntas que son una especie de guía para establecer las variables, lo cual permite la relación entre los datos conocidos que sitúan a la incógnita y la ubican en un contexto determinado; al mismo tiempo que la incógnita da fundamento a los datos, de esta manera, los datos adquieren importancia porque permiten llegar a tener nuevas informaciones; y lo desconocido adquiere sentido al relacionarse con algunos datos específicos, por lo que, se requiere de los conceptos, ideas y organización, para poder cumplir con la primera fase. Al momento de comprender la información se debe trasladar a gráficos y tablas.

> ¿Relaciona datos y variables?, ¿Traduce las oraciones del enunciado al lenguaje algebraico?, ¿Vincula los conceptos y habilidades con los conocimientos previos?, y ¿Expresa el enunciado del problema de otra manera?.

En la segunda fase, se procede a vincular los datos con la incógnita a través del lenguaje simbólico, para ello se utilizan: fórmulas, ecuaciones, se establece la existencia de patrones entre la variable dependiente e independiente etc., así como también se emplea conocimientos previos para conectar con los nuevos, proporcionando significado al aprendizaje, a este proceso el modelo cognitivo lo conoce como el aprendizaje significativo, defendido por David Ausubel. Por otro lado, en esta fase también es fundamental enunciar el problema de otra manera sin alterar los datos y la pregunta, lo cual lleva implícito la interdisciplinariedad con otras asignaturas.

> ¿Emplea la estrategia planificada para la solución del problema?, ¿Argumenta el uso de los algoritmos en cada operación realizada?.

En la tercera fase, cada estudiante aplica el plan que había preparado, lo resuelve y efectúa un seguimiento de todos los procesos, con su respectiva argumentación. Explica por qué la hace, de tal manera y para qué lo hace, es decir, monitorea. Según algunos autores en esta etapa se repasa el camino que se ha seguido; para ejecutar el plan; entonces el estudiante entra a un conflicto cognitivo, produciéndose un desequilibrio cognitivo lo cual provoca el aprendizaje.

Si el plan está bien concebido, su realización es factible, y si además se poseen los conocimientos y el entrenamiento necesario, debe ser posible llevarlo a cabo sin contratiempos. Si aparecen dificultades, se tiene que regresar a la etapa anterior para realizar ajustes al plan o incluso para modificarlo por completo.

¿Verifica los resultados?, ¿Analiza si el resultado obtenido es coherente con el enunciado? Y ¿Sugiere alternativas diversas para resolver el mismo problema?

Finalmente, en la cuarta fase se evalúa o verifica si el resultado es lógicamente posible, si está de acuerdo a los datos y si responde a la incógnita; en otras palabras se regresa a revisar cada paso de forma que exista coherencia en cada uno de ellos; de manera que se interiorice la estrategia aplicada. En esta fase se fortalece la destreza de plantear diversas estrategias para resolver un mismo problema, ante lo cual, el estudiante está dispuesto a reflexionar y cuestionar sobre los pasos que ha seguido y ha llegado a una misma respuesta.

Para resolver problemas es necesario contar con métodos o heurísticas, ya que hacerlo es una aventura, entonces se adopta una postura constructivista, puesto que el mismo estudiante es el que construye su propio conocimiento, adaptando sus nuevas experiencias con las ya existentes; induciendo los cambios en su estructura mental, a través de la reacomodación, evitando de esta forma que el estudiante se encuentre ante situaciones de frustración, sino por el contrario, que él este predispuesto a enfrentar situaciones nuevas y diferentes.

El docente tiene un rol fundamental que es de mediador, para ello debe plantear preguntas y recomendaciones de tal suerte que influya en el pensamiento lógico, lo cual se cristalizará cuando el maestro presente al educando escenarios que le acerque a situaciones reales, que requiera de la aplicación de propiedades; pero fundamentalmente, que tengan vinculación directa con el propósito personal de cada estudiante; promoviendo de esta forma un aprendizaje de calidad, en cuanto a la resolución de problemas de relación de recurrencia, en estricta vinculación con la realidad circundante del estudiante.

Capítulo II

2.2 Metodología

La realización de este trabajo de investigación se fundamentó en el enfoque cualitativo-cuantitativo, ya que se recogió y analizó datos del impactó acerca del método de Polya en la resolución de problemas de recurrencia y posterior a ello, se tabuló e interpretó los resultados de manera que se estableció el número de estudiantes que cumplieron con las diferentes categorías e indicadores de las dos variables, así como también en ¿cuántos problemas lo aplicaron?.

Dentro del salón de clase los estudiantes compartieron experiencias, para mejorar el planteamiento y desarrollo de problemas específicos de relación de recurrencia, es decir, se trabajó de forma colaborativa con la finalidad de potenciar la creatividad, el análisis y la reflexión; basado en el diseño cuasiexperimental; para ello, se aplicó la guía didáctica al grupo preestablecido denominado experimental. Dinamizando de esta manera el proceso de enseñanza-aprendizaje, fortaleciendo las destrezas de razonamiento inductivo, la confianza y la seguridad, para resolver cualquier situación problemática interdisciplinaria y de la vida cotidiana.

La investigación se realizó en la Unidad Educativa “Chordeleg”, ubicada en el cantón Chordeleg, parroquia Chordeleg, institución pública que oferta el Bachillerato General Unificado en Ciencias, así como el Programa del Diploma de la Organización del Bachillerato Internacional.

Para llevar a cabo la intervención se siguieron los procedimientos regulares, por lo que, el permiso para realizar la intervención fue solicitado a la autoridad máxima de la institución, quien dio el aval, Anexo 1, así como también conocía del consentimiento informado, dirigido a los padres de familia y a los estudiantes tanto del grupo de control como experimental.

2.2.1 Población

La población estuvo conformada por 165 estudiantes que pertenecían a los cinco cursos y paralelos “A”, “B”, “C”, “D” y “E” de los terceros años de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Chordeleg.

2.2.2 Muestra

Los grupos en los cuales se aplicó la investigación estuvieron constituidos por los estudiantes del Tercero “A” como grupo de control y el Tercero “B” como el grupo experimental, a partir de ellos se tomó una muestra no aleatoria de 80 estudiantes, cada paralelo estaba conformado por 40 educandos; además, es necesario resaltar que la investigación se aplicó en esta muestra, debido a que en su malla curricular se contempla la resolución de problemas de relaciones de recurrencia, que corresponde a la asignatura de Matemática Superior que ha elegido la institución como optativa; con una carga horaria de 6 horas semanales.

La edad de los estudiantes participantes osciló entre los 16 y 19 años de edad, provenían de diversos tipos de familias, cuyos domicilios estuvieron ubicados en los cantones de: Chordeleg, Gualaceo y Sígsig. La situación económica fue media-baja. El grupo de control estaba constituidos por 40 estudiantes: 26 mujeres y 14 hombres; mientras que en el grupo experimental lo conformaban 17 mujeres y 23 hombres, con un total de 40 estudiantes.

Se tomó una muestra de dos docentes de una población constituida por doce miembros del Área de Matemática; puesto que en los grupos de control y experimental laboraban diferentes docentes. La planificación para el bloque correspondiente a las relaciones de recurrencia se lo hizo de manera individual, es decir, el docente maestrante planificó de acuerdo a la metodología usada, en este caso con el método heurístico de Polya y el otro docente sin el método para resolver exclusivamente problemas de relación de recurrencia.

Con los consentimientos informados de parte de los padres de familia, Anexo 2, se inició con la intervención, a partir de finales del segundo bloque e inicios del tercer bloque, por lo que el pretest se aplicó en octubre de 2015 en los dos grupos de estudio, y el postest en enero de 2016, igualmente en los dos grupos.

Las planificaciones correspondientes a la resolución de problemas de la relación de recurrencia se lo hizo en base de los tres momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje: anticipación, construcción del conocimiento y consolidación; de esta manera se aplicó diferentes estrategias didácticas para dar paso al aprendizaje significativo.

En la etapa de anticipación se realizó varias actividades con el apoyo de diferentes recursos didácticos así:

1. Se contextualizó el tema a través de la presentación y análisis del objetivo de la guía didáctica.
2. Se observó un video y con la guía del docente compartieron criterios acerca de las diferentes etapas que conforman el ciclo de la vida.
3. Se procedió a indagar acerca de los conocimientos previos relacionados con las: sucesiones, progresiones aritméticas, relación de recurrencia, ecuaciones

de segundo grado y sistemas de ecuaciones; es decir, se reactivó preconceptos acumulados en la estructura cognitiva del estudiante, lo que permitió vincular con la nueva información fortaleciendo de esta forma el aprendizaje significativo sustentado por David Ausubel.

4. Además, en esta fase se trabajó en base a la reflexión; lo que permitió evidenciar el grado de apropiación de aspectos fundamentales para continuar con el proceso de aprendizaje. Todo esto se desarrolló en parejas de manera colaborativa, creando: empatía, compañerismo, solidaridad; lo que ayudó de manera ostensible; pues que, el aprendizaje de uno de ellos favoreció el aprendizaje de la otra persona.
5. Se envió a casa a realizar lectura del marco teórico correspondiente a la relación de recurrencia y resolución de problemas de recurrencia contempladas en la guía didáctica; la misma que fue entregada a cada estudiante con anterioridad, tratando de aplicar una de las estrategias que induce al estudiante a fortalecer el gusto por la lectura, como es la clase invertida.

En el momento de construcción del conocimiento se siguió el siguiente proceso:

1. Se inició la clase con preguntas para el control de lectura y se reforzó aquello que aún no estaba interiorizado.
2. Se continuó con el proceso de enseñanza-aprendizaje, aplicando varias estrategias activas basada en metodologías que tienen como objetivo responder a inquietudes como: ¿qué sabemos?, ¿qué deseamos? y ¿qué aprendemos?; así como también se aplicó la estrategia: lo positivo, negativo y lo interesante.

3. Por otro lado, se utilizó la guía didáctica para analizar la resolución de problemas modelos, ya que en la guía se describió de manera muy explícita cada fase del método heurístico de Pólya, con su respectiva argumentación; con lo cual se pretendió fortalecer aún más el aprendizaje del método de Pólya.
4. Para retroalimentar se presentó diapositivas con las fases del método de George Polya, para ello, el conocimiento se desagregó en diapositivas de Prezzi, Anexo 3.
5. Dedujeron conceptos generales, leyes, generaron ideas y reflexiones, es decir, se responsabilizaron de construir su propio aprendizaje, fusionando tanto el modelo pedagógico cognitivo como las cuatro fases del método heurístico de Pólya, a través del trabajo colaborativo cada pareja tuvo el propósito de dar origen a la construcción del conocimiento
6. Además, se analizaron problemas de aplicación de: relación de recurrencia, sucesiones y progresiones aritméticas. Se desarrolló de esta manera la capacidad de resolver cualquier tipo de problema vinculados a contextos de otras disciplinas y de la vida cotidiana.
7. Se monitoreó la producción de ideas, criterios personales, análisis, planteamiento de estrategias; pero sobre todo, habilidades para verificar resultados obtenidos; mismos que deben presentar coherencia con el enunciado. El seguimiento se realizó a través de preguntas ¿Cuáles son los datos conocidos?, ¿Qué nos pide?, ¿A dónde se debe llegar? ¿Cuál es el proceso a seguir? y se aclararon determinadas inquietudes, lo cual ayudó a la toma de decisión para resolver problemas de matemáticos, así como, de la vida cotidiana, aplicando las cuatro fases del método heurístico de Pólya. En

consecuencia se realizó una constante retroalimentación o feedback en el aula y mediante la red social Facebook.

Para concluir la intervención en lo que corresponde a la etapa de consolidación del conocimiento, se procedió de la siguiente manera:

1. Realizaron el trabajo independiente a través de la resolución de problemas aplicando paso a paso el método heurístico de Polya.
2. Argumentaron cada categoría con sus respectivos indicadores. Esta etapa fue fundamental, puesto que los estudiantes valoraron el aprendizaje y el aporte del método de Pólya en la resolución de problemas; así como, expresaron de manera voluntaria y libre; la reflexión ¿en qué medida los nuevos conocimientos ayudarían a cambiar su forma de pensar? y ¿cómo pueden utilizarlos?.
3. Elaboraron propuestas personales y se aclararon preguntas adicionales que surgieron al finalizar este proceso.

En estas circunstancias, el rol del docente fue crear ambientes que promovieron: inquietudes, preguntas, dudas. Y, sobre la marcha la docente acompañó a cada grupo, para ello: interactuó, verificó el nivel de transferencia, comprensión y producción de ideas y motivó para que desarrollen los problemas en base al método en estudio; así como, promovió la vinculación de los conocimientos previos y los nuevos, con el propósito de generar desequilibrios y aprendizajes.

Cada etapa del proceso de enseñanza-aprendizaje se evaluó con dos rúbricas elaboradas por el maestrante investigador; basada en la escala de Likert de nivel ordinal, de tal forma que los diferentes indicadores fueron valorados por un ítem de cinco niveles conformados por: resuelve 0, 1, 2, 3, y 4 problemas, lo que permitió medir la frecuencia con la que los estudiantes aplicaron los indicadores del método de Polya, que es la variable independiente. En cuanto a la resolución de problemas de relación de recurrencia, variable dependiente, se basó en la escala nominal, ya que al momento de responder a los indicadores de las dos categorías se eligió entre los niveles sí o no y no las dos al mismo tiempo, ya que son mutuamente excluyentes.

Los paquetes estadísticos que se utilizaron para procesar y tabular los datos fueron el Spss y Microsoft Excel, así como, se usó el programa Ilustrador para elaborar las figuras del pretest y postest correspondientes al grupo de control y experimental.

Se hizo una retrospección entre lo que se venía haciendo años atrás y lo que ahora se pretende hacer con respecto a la solución de problemas, en base del uso de alguna estrategia para obtener resultados lógicos y coherentes. Además, es primordial expresar la situación de que sin conocer con profundidad los diferentes indicadores del método de Polya, algunos estudiantes ya lo aplicaban de manera inconsciente.

Permanentemente se motivó a los estudiantes para que se predispongan a la flexibilidad de pensamiento y se den oportunidad de acceder a diversos métodos para resolver problemas, lo cual permite tener nuevas oportunidades para dar solución a problemas cotidianos y de las diferentes asignaturas, potenciando la interdisciplinariedad entre ellas.

2.2.3 Instrumento de evaluación

Tanto la variable independiente: método heurístico de Polya; como la dependiente: resolución de problemas de relación de recurrencia, contemplaron diferentes categorías e indicadores. Así por ejemplo, la categoría: Comprender el problema tiene tres indicadores, en tanto que Concebir un plan posee cuatro indicadores, etc. Además, se cuenta con el número de problemas que han resuelto los estudiantes en los diferentes momentos.

Los instrumentos de evaluación que se aplicaron fueron: pretest y postest. El primero se validado en la junta de área y luego se efectuó el pilotaje, en una muestra de condiciones similares al grupo de control y experimental, esto se ejecutó en el año lectivo 2014-2015; lo cual aportó mucho ya que permitió controlar el tiempo y además, se corrigió y validó la estructura del pretest. Mientras que el postest se validó en el pilotaje y en junta de área.

El diseño del pretest y postest se elaboró por parte del maestrante investigador, en base de una prueba escrita con un cuestionario de tres preguntas abiertas conceptuales, y con cuatro problemas relacionadas con las: sucesiones, progresiones aritméticas y relación de recurrencia; con niveles de complejidad creciente, en tanto que el postest se incrementó una pregunta abierta.

El pretest y postest, Anexo 4 y 5, se evaluaron mediante una rúbrica, en la cual cada indicador de la variable independiente, tuvo una escala de cero a cuatro, de acuerdo al número de problemas resueltos con determinados indicadores, Anexo 6, y en el caso de las categorías e indicadores correspondientes a la variable dependiente, se analizó a través de una rúbrica de escala sí o no, Anexo 7.

Capítulo III

3.1 Resultados

3.1.1 Análisis de resultados.

Una vez que se contaba con los datos del pretest y postest del grupo de control y experimental, se procedió a usar el software Spss, para tabular los datos en 17 indicadores que están vinculados con 4 categorías de la variable independiente y 2 categorías de la variable dependiente.

3.1.2 Resultados pretest.

Las tablas que se describen a continuación corresponden al grupo de control y debido a la extensión del texto se ha simbolizado los indicadores con las abreviaturas por ejemplo I1 se refiere a Indicador 1, I2 a Indicador 2, etc.

En el pretest, el porcentaje de estudiantes del grupo de control que cumplen con el I1, tanto en 3 y 4 problemas es mayor que el porcentaje de estudiantes del grupo experimental. Mientras, que el porcentaje de estudiantes del grupo experimental que cumplen específicamente los indicadores I2 e I3 son mayor al grupo de control, focalizado en la resolución de 1 y 2 problemas. Tabla 1.

Tabla 1. *Pretest-Comprender el problema*

	ESTUDIANTES								
	GRUPO DE CONTROL						GRUPO E		
	I1.Identifica los datos del enunciado		I2. Identifica las variables del enunciado		I3.Plasma un gráfico acorde al enunciado		I1.Identifica los datos del enunciado		I2.Identifica variables d enunciado
Número de problemas	n	%	n	%	n	%	n	%	n
0	0,00	0,00	14,00	35,00	18,00	45,00	0,00	0,00	0,00
1	10,00	25,00	11,00	27,50	16,00	40,00	15,00	37,50	15,00
2	8,00	20,00	14,00	35,00	6,00	15,00	16,00	40,00	16,00
3	18,00	45,00	1,00	2,50	0,00	0,00	7,00	17,50	7,00
4	4,00	10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,00	5,00	2,00
TOTAL	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00

Nota: I1= Indicador 1; I2= Indicador 2; I3= Indicador 3.

En el grupo de control, el porcentaje de estudiantes que cumplen con los indicadores I4, I5, I6 eI7; en el pretest, es menor al porcentaje de estudiantes del grupo experimental, puesto que éstos últimos lo hacen particularmente para dos y tres problemas. Tabla 2.

Tabla 2. *Pretest-Concebir un plan*

	ESTUDIANTES												
	GRUPO DE CONTROL								GRUPO EXPERIM				
	I4.Relaciona los datos y las variables.		I5.Traduce las oraciones del enunciado al lenguaje algebraico		I6.Vincula los conceptos y habilidades con los conocimientos previos		I7.Expresa el enunciado del problema de otra manera		I4.Relaciona los datos y las variables		I5.Traduce las oraciones del enunciado al lenguaje algebraico		I6.Vir conc habil los cono previ
Número de problema	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n
0	22,00	55,00	32,00	80,00	32,00	80,00	38,00	95,00	3,00	7,50	0,00	0,00	10
1	13,00	32,50	5,00	12,50	5,00	12,50	1,00	2,50	17,00	42,50	8,00	20,00	20
2	5,00	12,50	3,00	7,50	3,00	7,50	1,00	2,50	15,00	37,50	20,00	50,00	9
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,00	10,00	8,00	20,00	1
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	2,50	4,00	10,00	0
TOTAL	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40

Nota: I4=Indicador 4; I5= Indicador 6; I7= Indicador 7.

El porcentaje de estudiantes del grupo de control que no aplican los indicadores I8 e I9, es mayor con respecto al porcentaje de estudiantes de grupo experimental, pues 39 estudiantes no cumplen con estos indicadores; durante el pretest. Tabla 3.

Tabla 3. *Pretest-Ejecutar el plan*

	ESTUDIANTES							
	GRUPO DE CONTROL				GRUPO EXPERIMENTA			
	I8.Emplea la estrategia planificada para la solución del problema		I9.Argumenta el uso de los algoritmos en cada operación realizada		I8.Emplea la estrategia planificada para la solución del problema		I9.Argumen de los algo en cada op realizada	
Número de problemas	n	%	n	%	n	%	n	
0	39,00	97,50	39,00	97,50	13,00	32,50	35,00	
1	1,00	2,50	1,00	2,50	19,00	47,50	3,00	
2	0,00	0,00	0,00	0,00	7,00	17,50	2,00	
3	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	2,50	0,00	
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
TOTAL	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	

Nota: I8=Indicador 8; I9= Indicador 9.

El porcentaje de estudiantes del grupo de control que no desarrollan los indicadores I10, I11 e I12, en el pretest es ligeramente menor al porcentaje de estudiantes del grupo experimental. Tabla 4.

Tabla 4. *Pretest-Examinar la solución obtenida*

	ESTUDIANTES								
	GRUPO DE CONTROL						GRUPO EXPI		
	I10.Verifica los resultados		I11.Analiza si el resultado obtenido es coherente con el enunciado		I12.Sugiere alternativas diversas para resolver el mismo problema		I10.Verifica los resultados		I11.Analiza si obtenido es c con el enunci
Número de problemas	n	%	n	%	n	%	n	%	n
0	39,00	97,50	40,00	100,00	40,00	100,00	33,00	82,5	36,00
1	1,00	2,50	0,00	0,00	0,00	0,00	6,00	15,0	4,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	2,5	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,00
TOTAL	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,0	40,00

Nota: I10=Indicador 10; I11= Indicador 11; I12= Indicador 12.

En el pretest, el porcentaje de estudiantes del grupo de control que no coordinan experiencias a través de los indicadores I13 e I14 es mayor que el porcentaje de los estudiantes del grupo experimental. Tabla 5.

Tabla 5. *Pretest-Coordinación de experiencias previas*

	ESTUDIANTES								
	GRUPO DE CONTROL				GRUPO EXPERIMENTAL				
	I13.Vincula los términos que antecede y precede		I14.Intuye la respuesta de un problema de relación de recurrencia		I13. Vincula los términos que antecede y precede		I14.Intuye la respuesta de problema de relación de recurrencia		
Relación	n	%	n	%	n	%	n		
NO	28,00	70,00	30,00	75,00	17,00	42,50	23,00	5	
SI	12,00	30,00	10,00	25,00	23,00	57,50	17,00	4	
TOTAL	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	1(	

Nota: I13=Indicador 13; I14= Indicador 14.

En el pretest, los indicadores I15, I16 e I17 correspondientes a la categoría conocimientos son definidos en menor proporción por los estudiantes pertenecientes al grupo de control. Tabla 6.

Tabla 6. *Pretest-Conocimientos*

	ESTUDIANTES									
	GRUPO DE CONTROL						GRUP			
	I15.Define lo que es una relación de recurrencia		I16.Identifica las condiciones iniciales		I17.Contrasta entre sucesión y relación de recurrencia		I15.Define lo que es una relación de recurrencia		I16.Ide condic iniciale	
Conceptos	n	%	n	%	n	%	n	%	n	
NO	32,00	80,00	20,00	50,00	23,00	57,50	20,00	50,00	14,0	
SI	8,00	20,00	20,00	50,00	17,00	42,50	20,00	50,00	26,0	
TOTAL	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40,00	100,00	40,0	

Nota: I15=Indicador 15; I16= Indicador 16; I17= Indicador 17.

3.1.3 Guía didáctica.

GUÍA DIDÁCTICA

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE RELACIÓN DE RECURRENCIA CON EL MÉTODO DE POLYA

ANTECEDENTES

Después de 16 años de trayectoria en la docencia y de haber compartido experiencias con adolescentes con edades comprendidas

JUSTIFICACIÓN

En base del pretest aplicados tanto al grupo de control y experimental se evidenció que los estudiantes no cuentan con estrategias para resolver un problema en cualquier asignatura, por ello es fundamental que se inicie este trabajo con definiciones básicas como el de Método de Polya, Relación de Recurrencia y Resolución de problemas.

DEDICATORIA

Queridos/as estudiantes de Tercero año de bachillerato general unificado paralelo “B”, hago llegar este aporte con la finalidad de fortalecer el proceso de resolución de problemas Matemáticos y de la vida cotidiana, ya que en muchas ocasiones resolver problemas se ha convertido en el talón de Aquiles, además, con el ferviente deseo de que en algún momento desarrollen el gusto por la Matemática, ya que:

“HUIR DE LAS MATEMÁTICAS ES IMPOSIBLE, PUES FORMAN PARTE DE TI MISMO”

ESTRELLA J.

ASIGNATURA:

Matemática Superior

UNIDAD: **Número y Funciones**

DIMINIO COGNITIVO: **Aplicación Resolución de problemas de relación de recurrencia.**

OBJETIVO DE LA GUÍA

Fortalecer el aprendizaje de resolución de problemas de relación de recurrencia aplicando el método de Polya en base del trabajo colaborativo.

METODOLOGÍA

La presente guía plantea y resuelve tres problemas, cada uno con grados de dificultad creciente, luego se resolverá problemas específicamente referidos a la relación de recurrencia, con la guía del docente y en trabajo colaborativo en clase y posterior se propondrá un grupo de problemas para ser resueltos en casa, en base del marco teórico y se evaluará en tanto el pretest y postest con una rúbrica con sus respectivos indicadores.

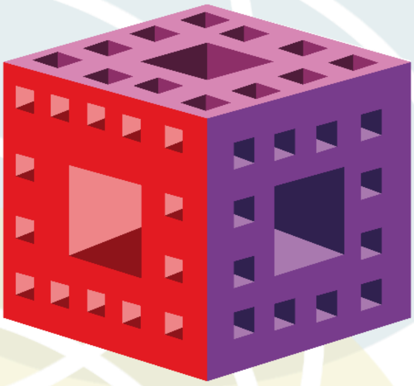
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Muchos autores afirman que resolver problemas, se inicia en el mismo momento en que se hace los ejercicios, pues cada estudiante lo enfrenta de acuerdo a su estilo de aprendizaje, de conocimientos previos y motivación con los cuales cuentan, ya que para un estudiante será complicado un ejercicio mientras que para otro no lo será.

Kilpatrick (citado por Ramírez, 2011) expresa, “Problema matemático es una definición en la que se debe alcanzar una meta, pero en la cual está bloqueada la ruta directa”. Un problema matemático es una situación que induce alcanzar un objetivo definido, pero la manera como se lo haga está sujeta a una serie de impedimentos, es decir, no se realizará de manera inmediata, puesto que se debe ejecutar procesos matemáticos para llegar a la meta, en muchas ocasiones se cometerán muchos errores hasta visualizar la solución, pero de esas equivocaciones se aprende.

RELACIÓN DE RECURRENCIA

Es una ecuación expresada en base de una sucesión recursiva, es decir, que cada término se establece a partir del anterior Fumero (2007) dice: “Resolver un problema de recurrencia es hallar un valor determinado de una sucesión la misma que depende del término de posición” (p.12). Cuando se resuelve un problema de recurrencia, considerar cualquier término no aporta, lo que se debe contemplar es la ubicación de éste, en base de las condiciones de frontera.



MÉTODO DE POLYA

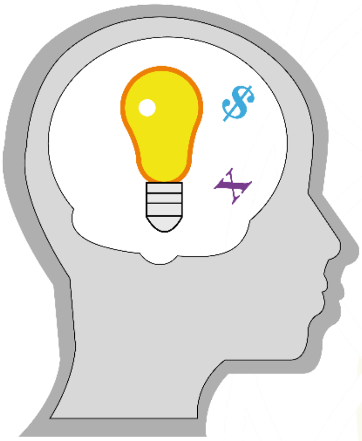
Pólya no solo fue un filósofo, sino matemático y literato, desarrolló muchas habilidades para la Matemática y sobre todo para resolver problemas y en su obra How to solve it?, que traducido significa ¿Cómo plantear y resolver problemas?, plasma de manera explícita las cuatro fases. Cabe recalcar que el marco teórico de Pólya ha servido de base para varios estudios sobre la resolución de problemas, pero cada investigador matemático le da la perspectiva de acuerdo a sus concepciones, sin embargo, al final concluyen que cuando un estudiante se encuentra frente a un problema concerniente a la Matemática o de la vida cotidiana, es necesario desempeñarse en habilidades de pensamiento tales como de: raciocinio, reflexión y verificación.

Pólya marca la diferencia entre las heurísticas para resolver problemas, ya que combina la resolución de ejercicios y específicamente de problemas y se apoya en las cuatro categorías o fases con sus respectivas preguntas, entonces, Polya (citado por Kléver, 2012) expresa:

> ***Comprender el problema****: ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la variable?, ¿Hace un diagrama con los datos y variable correspondientes?*
>
> ***Concebir un plan:*** *¿Relaciona datos?, ¿Relaciona variables?, ¿Aplica conocimientos previos? y ¿Podría enunciar el problema de otra forma?*

Ejecutar el plan: *¿Emplea la estrategia planificada para la solución del problema?, ¿Acompaña cada operación matemática con el argumento por que hace y para qué lo hace?*

Examinar la solución obtenida: *¿Puede verificar el resultado?, ¿La solución es lógicamente posible? ¿Resuelve de otra manera el mismo problema?*



CONOCIMIENTOS PREVIOS

Se refiere a las habilidades y destrezas con los que cuentan los estudiantes en su estructura cognitiva, de manera que se vinculan entre los conocimientos anteriores y los nuevos.

PRIMERA PARTE

PROBLEMA UNO

El requisito primordial es producir ideas y usar al máximo la creatividad, entonces, empecemos a resolver los siguientes problemas:

Una sucesión representa el ahorro de dinero semanal, inicia con 2 dólares y luego se va incrementando 3 dólares a cada semana, de manera que se llega hasta la sexta semana con 20 dólares, ¿Cuál es la cantidad que se ahorrará la siguiente semana?

Comprender el problema:

¿Qué es una sucesión?

Es un conjunto ordenado de números, que no necesariamente requieren de una fórmula o regla de generación.

La sucesión está constituida por elementos llamados términos, los mismos que se diferencian por un subíndice.

Término general de una sucesión es aquel que ocupa cualquier lugar, se simboliza con a_n

a) ***Identificamos los datos***

Se conoce qué cantidad de dinero se inicia ahorrando

Hay una cantidad de dinero que se va adicionando a cada semana anterior

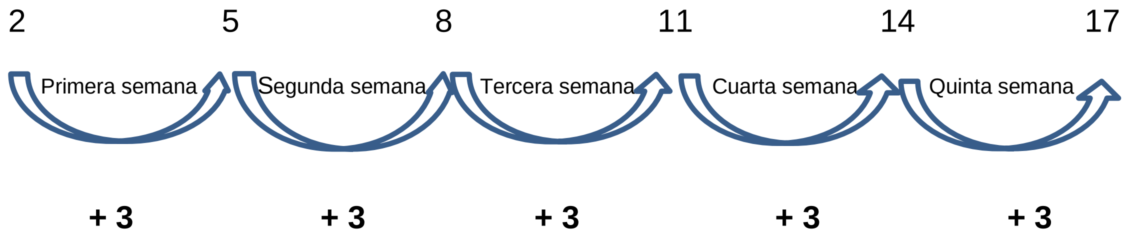
El dinero que se ahorra la sexta semana es conocido

El número de semanas que se ahorra también se conoce

b) ***¿Qué es lo que debemos determinar?***

La cantidad de dinero que se ahorra en la séptima semana

c) ***¿Dibujamos un diagrama en base de los datos y variables?***



Concebir un plan:

a) ***¿Relaciona datos y variables?***

En base de los datos anteriores se obtiene la cantidad de dinero que se ahorra en la séptima semana o séptimo término

Es decir, la primera semana se ahorró 3 dólares más, la segunda semana ocho dólares, la tercera semana 11 dólares y la sexta semana 20 dólares, por lo que la séptima semana se obtendrá sumando a la cantidad de dinero ahorrado en la sexta semana adicionado tres dólares más.

b) ***¿Cómo podemos expresar el lenguaje natural en lenguaje algebraico?***

La cantidad con la que se inicia ahorrando la primera semana o primer término, se simboliza como $\boldsymbol{a_1}$

La cantidad de dinero que se incrementa se le identifica como la diferencia d

La sexta semana, representa el sexto término se simboliza con a_6

Número de semanas o términos n

El dato desconocido que corresponde a la séptima semana, o séptimo término se simboliza con a_7

c) ***¿Aplicamos conocimientos previos?***

NÚMEROS ORDINALES → Son aquellos números que indican la posición, por ejemplo: primero, segundo, quinto, décimo, etc.

NÚMEROS REALES → Son aquellos que pueden ser expresados por un número entero o decimal, por ejemplo: 3; 5; 29; 2,5; etc.

d) ***¿Podríamos enunciar el problema de otra forma?***

Si a la cantidad de dinero ahorrado en cada semana se le aumenta tres dólares, comenzando con dos dólares, ¿Cuánto se ahorra la séptima semana?, si en la sexta semana se ahorra 20 dólares.

Ejecutar el plan:

a) ***¿Empleamos la estrategia planificada para la solución del problema?***

En base del enunciado y del diagrama se establece que cada término es igual al anterior más la diferencia. Entonces,

$a_1 = a_1;$

$a_2 = a_1 + d;$

$a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d;$

$a_4 = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d;$

$a_5 = a_1 + d + d + d + d = a_1 + 4d$

$a\_6 = a_1 + d + d + d + d + d = a_1 + 5d$

y siguiendo así sucesivamente, se obtendrá los demás términos, pero para determinar la cantidad de dinero que se ahorra en la séptima semana, aplicaremos la fórmula del término general de una sucesión, la misma que se deduce de la anterior:

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ (1)

En (1) tenemos que:

$\mathrm{n} = \text{número de los términos presentes en la sucesión}$

$\mathrm{a}_1 = \text{primer término}$

$\mathrm{d} = \text{diferencia}$

b) ***Acompañamos cada operación matemáticamente con el argumento ¿por qué lo hacemos y para qué lo hacemos?***

Se procede a sustituir en la fórmula (1), los datos conocidos, para determinar la cantidad de dinero que se ahorra en la séptima semana. Entonces en este problema

$$\mathrm{a}_7 = ?$$

$$\mathrm{a}_1 = 2 + 3$$

$$\mathrm{n} = 7$$

$$\mathrm{d} = 3$$

Sustituyendo en (1)

Tenemos

$$\mathrm{a}_7 = 5 + (7 - 1).3$$

Se realiza los cálculos aritméticos, en este caso de multiplicación y de suma

$$a_7 = 5 + (6).3$$

Esto nos permitirá calcular la cantidad de dinero ahorrado en la séptima semana

$$a_7 = 23 \text{ dólares}$$

<u>Examinar la solución obtenida:</u>

a) ¿Podemos verificar el resultado?

Si se inicia el ahorro con de dos dólares y la segunda semana se incrementa 3 dólares, y si la sexta semana se ahorra 20, entonces, la séptima semana será:

20+3 = 23 dólares

b) ¿La solución es lógicamente posible?

El resultado tiene mucho de verdadero, ya que en la semana séptima se debe ahorrar más dinero que en la sexta semana por lo que 23 > 20, pues se ha sumado a la sexta semana 3 dólares

c) ¿Resolvemos de otra manera el mismo problema?

En este problema podemos formar la sucesión de la siguiente manera: 5, 8,11, 14, 17, 20, 23.

En donde,

Cada término que antecede da origen al término que precede al momento de sumar tres dólares, por lo que se puede obtener también aplicando la estrategia

$a_1 = a_1;\ \ a_2 = a_1 + d;\ a_3 = a_1 + 2d;\ a_4 = a_1 + 3d; a_5 = a_1 + 4d; a_6 = a_1 + 5d;$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_7 = a_6 + d = a_1 + 5d + d = a_1 + 6d$$

Por consiguiente la cantidad ahorrada en la séptima semana es de 23 dólares.

PROBLEMA DOS

Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética. Sabiendo que el mayor de ellos mide 105°, ¿cuánto miden los otros dos?

Comprender el problema:

¿Qué significado tiene la progresión aritmética?

Sucesión que tiene un orden, un valor constante llamada diferencia. Esta puede ser creciente o decreciente.

a) *¿Identificamos los datos?*

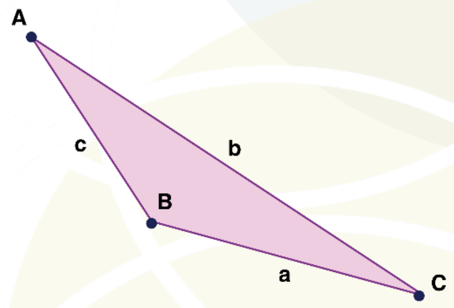
Los ángulos del triángulo están en progresión aritmética.

El mayor de los ángulos tiene una amplitud de 105°

b) ¿Qué es lo que debemos determinar?

La amplitud de los dos ángulos restantes

c) ¿Dibujamos un diagrama en base de los datos y variables?



En el diagrama, el ángulo C= $\propto_1$, ángulo A= $\propto_2$ y el ángulo B= $\propto_3$, los dos primeros ángulos hay que determinar y en función del enunciado $\propto_1$ será menor en amplitud a $\propto_2$ y éste a su vez menor a $\propto_3$, guardando entre ellos un patrón constante puesto que están en progresión aritmética.

Concebir un plan:

a) ¿Relacionamos datos y variables?

Fundamentados en los datos conocidos se obtendrá los dos ángulos desconocidos.

b) ¿Cómo podemos expresar el lenguaje natural en lenguaje algebraico?

Para ello se asignará:

Primer ángulo o primer término $\propto_1$

Valor constante $\boldsymbol{d}$

Entonces, el segundo ángulo es $\propto_2 = \propto_1 + \mathrm{d}$

El tercer ángulo es $\propto_3 = \propto_1 + 2\mathrm{d}$ y su valor es de 105°

La suma de los tres ángulos internos de un triángulo es de $\mathbf{180}°$

c) ¿Aplicamos conocimientos previos?

Cuando un triángulo tiene un ángulo mayor 90°, el triángulo será obtusángulo, y los ángulos restantes serán menores a 90°.

Una progresión aritmética es una sucesión, que se genera por la adición o resta de un valor llamado diferencia, por lo que la progresión será creciente o decreciente.

Cuando tenemos dos variables o datos desconocidos es necesario trabajar con sistema de dos ecuaciones de primer grado, y para resolver se puede aplicar cualquiera de los métodos: reducción, igualación, determinantes, etc.

d) ¿Podríamos enunciar el problema de otra forma?

¿Cuáles son las medidas de los dos ángulos de un triángulo obtusángulo?, si uno de ellos tiene una amplitud de 105° y además están en progresión aritmética.

Ejecutar el plan:

a) Empleamos la estrategia planificada para la solución del problema

Aplicamos el marco teórico de la suma de los ángulos internos de un triángulo y planteamos el sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$\propto_1 + (\propto_1 + \mathrm{d}) + 105° = 180°$ (1)

$\propto_2 = \propto_1 + 2\mathrm{d} = 105°$ (2)

b) ***Acompañamos cada operación matemáticamente con el argumento ¿por qué lo hacemos y para qué lo hacemos?***

El sistema de ecuaciones a y b se resolverá aplicando el método de igualación y la propiedad uniforme de las igualdades, ya que si se aumenta o disminuye la misma cantidad en ambos miembros, la igualdad se conserva

$$2 \propto_1 + d + 105° - 105° = 180 - 105°;$$

$2 \propto_1 + d = 180 - 105°; 2 \propto_1 + d = 75°$; Conjuntamente con la segunda ecuación

$$2 \propto_1 + d = 75°$$

$$\propto_1 + 2d = 105°$$

Despejando $\propto_1$ en las ecuaciones 1 y 2, obtenemos 3 y 4

$$\propto_1 = \frac{75° - d}{2} \quad (3)$$

$$\propto_1 = 105° - 2d \quad (4)$$

Posterior a ello igualamos los resultados

$\frac{75° - d}{2} = 105° - 2d;$

Aplicamos las propiedades de las igualdades

75°- d = 210°- 4 d

75°- d + d = 210°- 4 $d + d$

y de acuerdo a la teoría del opuesto

75° = 210°- 3d

75°- 210° = 210°- 210°- $3d$

-135° = - $3d$ (5)

Al multiplicar todo la igual de (5) por (-1), se tiene

135° = $3d$ (6)

En (6) y de acuerdo al recíproco o inverso multiplicativo

$\frac{3}{3}d = \frac{135°}{3}$; $d = 45°$, este valor sustituyo en la igualdad del paso (4)

$\propto_1 = 105° - 2(45°)$; $\propto_1 = 15°$

$d = 45°$y$\propto_1 = 15°$

De lo anterior se deduce que:

el primer ángulo es

$\propto_1 = 15°$

Segundo ángulo

$\propto_2 = 15° + d$; $\propto_2 = 15° + 45°$

$\propto_2 = 60°$

<u>Examinar la solución obtenida:</u>

a) ¿Podemos verificar el resultado?

¿Cuántos ángulos tienen un triángulo?

Un triángulo tiene tres ángulos.

¿Cuánto es la suma de los ángulos internos de un triángulo?

Los tres ángulos suman 180°

$\propto_1 = 15°$; $\propto_2 = 60°$ $\propto_3 = 105°$;

$\propto_1 + \propto_2 + \propto_3 = 15° + 60° + 105°$;

$\propto_1 + \propto_2 + \propto_3 = 180°$

b) ¿La solución es lógicamente posible?

La amplitud de los dos ángulos desconocidos no puede sumar más de 90°, ya que se tiene como dato la amplitud del ángulo obtusángulo.

c) ¿Resolvemos de otra manera el mismo problema?

Si tenemos como ángulos

$\measuredangle a + \measuredangle b = \measuredangle 180° - \measuredangle 105° = \measuredangle 75°$ (1)

$\measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c = \measuredangle 180°$ (2)

Reemplazando (1) en (2)

$\measuredangle 75° + \measuredangle c = \measuredangle 180°$

PROBLEMA TRES

Encontrar la solución única de la ecuación de recurrencia que representa el número de regiones en las que queda dividido un plano al trazar en él n rectas, de forma que se cortan dos a dos y tal que tres rectas no tenga un punto en común.

Comprender el problema:

¿Qué es una recta?

Se llama línea recta al lugar geométrico de todos los puntos contenidos en el plano tales que, tomados dos puntos cualesquiera **A** (1, 1) y **B** (2, 2) de la recta, el valor de la pendiente m, es siempre constante.

¿Qué es un plano?

Se refiere a la superficie geométrica que no posee volumen, es bidimensional, que posee un número infinito de rectas y puntos que lo cruzan de un lado al otro.

¿Qué son rectas paralelas? Dos rectas son paralelas cuando mantienen una distancia equidistante entre sí.

a) ***Identificamos los datos***

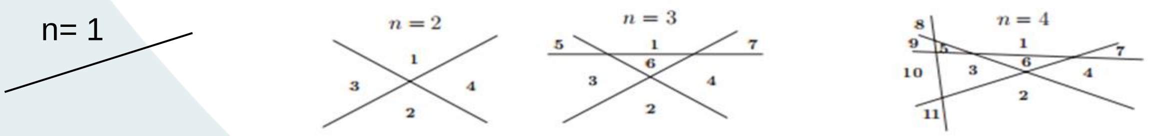
Se conoce el número de rectas que van a cortar al plano

Hay una cantidad de rectas que se va adicionando

b) ***¿Qué es lo que debemos determinar?***

En primera instancia la ecuación de recurrencia en base de las condiciones iniciales o de frontera, y luego determinar la solución única de esta ecuación.

c) ***Dibujamos un diagrama en base de los datos y variables***



Concebir un plan:

a) ¿Relacionamos datos y variables?

En base de los datos anteriores podemos determinar el número de partes en las que se divide el plano. Es decir, inicialmente se traza una recta, lo que divide al plano en dos regiones; si se traza dos rectas no paralelas, divide al plano en cuatro regiones, al trazar tres rectas tenemos siete regiones, por lo que si trazamos seis rectas se formarán 26 regiones y así sucesivamente .

b) ¿Cómo podemos expresar el lenguaje natural en lenguaje matemático?

El número de regiones en que se divide el plano, son los términos y se simboliza con $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots}$

En este caso específico la condición inicial o de frontera está representada por $\boldsymbol{a_1}$

Al número de rectas que se trazan, se conoce como número de términos y se simboliza con $\boldsymbol{n}$

Los datos desconocidos corresponden a la ecuación de recurrencia y su única solución.

c) ¿Aplicamos conocimientos previos?

Relación de recurrencia.- Si en una sucesión tenemos los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots, a_n$ y el enésimo término se puede expresar en función de los términos previos $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots \ldots, a_1$

Las condiciones iniciales son $a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots, a_n$

Sistemas de ecuaciones lineales: Conjunto de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, que se pueden resolver por cualquiera de los métodos: reducción, igualación, sustitución, etc.

Ecuación de segundo grado: Una ecuación es una relación matemática entre números y letras. Es muy común trabajar con ecuaciones en las que sólo hay una letra, llamada incógnita, que suele ser la misma que está elevada al exponente dos y resolver la ecuación consiste en encontrar un valor (o varios) que, al sustituirlo por la incógnita, haga que sea cierta la igualdad. Esos valores son las soluciones de la ecuación.

Solución general.-La solución general puede ser de dos tipos, ello depende de las raíces que se obtengan en la ecuación característica, por lo que si son dos números reales distintos se aplicará la solución general siguiente

$a_n = \alpha(x_1)^n + \beta(x_2)^n$.

Pero si las raíces obtenidas son dos números reales iguales, la solución general tendrá la siguiente forma:

$a_n = \alpha(x_1)^n + \beta n(x_2)^n$.

d) *¿Podríamos enunciar el problema de otra forma?*

Las regiones en las que dividen al plano una, dos, tres, etc., rectas, ¿influye en la determinación de la ecuación de recurrencia y en la obtención de la única solución?, es necesario tener presente que no se intercepten tres rectas en un mismo punto.

Ejecutar el plan:

a) *¿Empleamos la estrategia planificada para la solución del problema?*

En base de los diferentes gráficos del paso correspondiente, se evidenciamos que al trazar una recta el plano se divide en dos regiones, si trazamos una recta más se adiciona dos regiones, en total tenemos cuatro regiones, cuando adicionamos una recta a las anteriores, es decir, tenemos tres rectas se forman tres regiones más al anterior, al idicionar una recta más cuatro, se adiciona cuatro regiones más en total once regiones, de donde, tenemos las condiciones iniciales: n, $a_1 = \ 2$

$n = 1$

$a_1 = \ 2$

$n = 2, \ a_2 = a_1 + n$

$n = 3, \ a_3 = a_2 + n$

$n = 4, \ \ a_4 = a_3 + n$

$n = 5\ , \ \ a_5 = a_4 + n$……………………

Y así sucesivamente, se evidencia que para establecer la relación recursiva, es necesario conocer la condición inicial o de frontera y el número de rectas que se traza, de donde se induce la ecuación de recurrencia que representa la situación de rectas que se cortan en un plano:

$a_n = a_{n-1} + n,$ para cada n≥ 2 (1)

En (1) tenemos que:

$\boldsymbol{n} =$ Número de rectas que se adicionan

$\boldsymbol{a_1} = 2$ (regiones)

$\boldsymbol{a_2} = 4$ (regiones)

Condiciones iniciales o de frontera

b) ***Acompañamos cada operación matemáticamente con el argumento ¿Por qué lo hacemos y para qué lo hacemos?***

Procedemos a sustituir en la fórmula (1), los datos de frontera, para determinar la ecuación de recurrencia y a partir de ella la ecuación característica, por lo que: este problema recursivo se resuelve, partiendo de

$\mathrm{a_n} = \mathrm{a_{n-1}} + 2$ con n$\geq 2,$ $\mathrm{a_1} = 2$ y $\mathrm{a_2} = 4$ en donde al aplicar n=2, se tiene la ecuación característica

$a_2 = a_1 + 2$

Trasladando a una ecuación de uso frecuente y aplicando las propiedades de la igualdad tenemos:

$x^2 - x - 2 = 0$ (2)

Al determinar en (2) el discriminante, se establece cuál es la relación que se aplicará, es decir, depende del número de raíces que se obtenga a partir del discriminante, en este caso

$$\sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$$

Sustituyendo

$\sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)} = \sqrt{9}$, por lo que se tendrá dos raíces

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2(1)}$; $x_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2}$; $x_1 = 2$

y $x_2 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} x_2 = -1$

Como ya manifestamos, el resultado del discriminante determina qué solución general se aplica, entonces,

$a_n = \alpha(x_1)^n + \beta(x_2)^n$ (3)

Reemplazando las condiciones de frontera en (3)

$a_1 = \alpha(x_1)^1 + \beta(x_2)^1$, pero $a_1 = 2$, entonces

$2 = \alpha(3) + \beta(-1)$ (4); además $a_2 = 4$

$4 = \alpha(3)^2 + \beta(-1)^2$ (5)

Para determinar α y β se requiere de conocimientos previos de sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$2 = 3\alpha - \beta$$

$$4 = 9\alpha + \beta$$

En esta oportunidad se aplica el método de igualación, así como también la propiedad transitiva, por lo que se tiene:

$\alpha = \frac{2+\beta}{3}$ *(6)*

$\alpha = \frac{4-\beta}{9}$ *(7)*

$\left(\frac{2+\beta}{3}\right) = \left(\frac{4-\beta}{9}\right)$ la propiedad transitiva determina que

$$\left(\frac{2+\beta}{3}\right)(3)(9) = \left(\frac{4-\beta}{9}\right)(9)(3)$$

18 + 9 β = 12 - 3β una vez más se aplica la propiedad transitiva

18 - 18+ 9 β + 3β =12 - 18+ 3β - 3β

$\frac{12}{12}\beta = \frac{-6}{12};$

β = - 0,5   reemplazando en (6)

$$\alpha = \frac{2 + (-0{,}5)}{3}$$

$\alpha = -0{,}5;$ *entonces, sustituyendo en*

$a_n = \alpha(x_1)^n + \beta(x_2)^n$ *(3)*

Por lo que, la solución única de la ecuación de recurrencia es

$a_n =$ *- 0,5*$(x_1)^n - 0{,}5(x_2)^n$

Examinar la solución obtenida:

a) ***¿Podemos verificar el resultado?***

En base de las condiciones iniciales, se determina la solución única de la ecuación de recurrencia.

b) ***¿La solución es lógicamente posible?***

Al momento de trazar una recta el plano se divide en dos regiones, al momento de trazar dos rectas el número de regiones aumenta, y como se basa en las condiciones de frontera y las operaciones son correctas, entonces la solución también lo es.

c) ¿Resolvemos de otra manera el mismo problema?

$a_1 = 2$

$a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \ldots \ldots \ldots . =?$

$\mathrm{n} = 1,2,3,4 \ldots \ldots ..$

Sustituyendo en (1)

Tenemos

$a_1 = 2;$

$n = 2$

$a_2 = a_{2-1} + 2 = 2 + 2 = 4$

$n = 3$

$a_3 = a_{3-1} + 3 = 4 + 3 = 7$

$n = 4$

$a_4 = a_{4-1} + 4 = 7 + 4 = 11$

$n = 5$

$a_5 = a_{5-1} + 11 = 5 + 11 = 16$

$a_5 = 16$

SEGUNDA PARTE

PROBLEMA UNO

Una sucesión inicia con una figura formada por tres puntos, la segunda por cinco puntos, la tercera por 7 puntos, la cuarta por 9 puntos y así sucesivamente. Determinar de ¿cuántos puntos está constituida la décima figura?

Comprender el problema:

¿Qué es una sucesión?

Es un conjunto ordenado de números, que no necesariamente requieren de una fórmula o regla de generación.

a) ***¿Identificamos los datos?***

- El número de puntos con los que se forma la figura uno se conoce

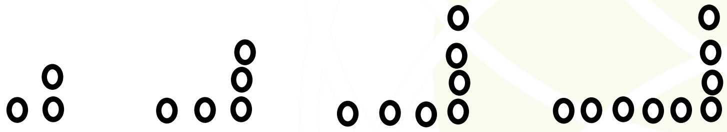
- Los puntos que se adiciona a cada figura son conocidos
- El número de puntos que conforma la cuarta figura está establecido
- El número de figuras que se quiere formar también se conoce

b) ¿Qué es lo que debemos determinar?

La cantidad de puntos que forman la figura décima.

c) ¿Dibujamos un diagrama en base de los datos y variables?

En base de los datos anteriores podemos obtener la cantidad de puntos que formarán cada figura, lo que permitirá determinar el número de puntos de la décima



……, ……, ….., …….., …….,

Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4

<u>Concebir un plan:</u>

a) ¿Relacionamos datos y variables?

Se inicia con tres puntos luego se incrementa dos puntos entonces el término que se busca va estar en función del primer término y la diferencia.

b) ¿Cómo podemos expresar el lenguaje natural en lenguaje matemático?

A la cantidad de puntos que conforman la primera figura, se conoce como el primer término y se simboliza con $\boldsymbol{a_1}$

La cantidad de puntos que se incrementa se le identificará como la diferencia $\boldsymbol{d}$

La cuarta semana se simboliza con $\boldsymbol{a_4}$

El número de figuras representa el número de términos y su simbología es n

El dato desconocido que corresponde a la décima figura se simboliza con a_{10},

c) ¿Aplicamos conocimientos previos?

NÚMEROS ORDINALES

Son aquellos números que indican la posición, por ejemplo: primero, segundo, quinto, décimo, etc.

NÚMEROS REALES

Son aquellos que pueden ser expresados por un número entero o decimal, por ejemplo: 3; 5; 29; 3,23455; etc.

d) ¿Podríamos enunciar el problema de otra forma?

Tres puntos constituyen la primera figura, cinco puntos constituyen la segunda figura, siete puntos forman la tercera figura. Establezca de ¿cuántos puntos se forma la décima figura?

Ejecutar el plan:

a) ¿Empleamos la estrategia planificada para la solución del problema?

+2 +2 +2 +2 +2 +2

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

De manera que cada término es igual al anterior más la diferencia, entonces,

$a_1 = a_1;$

$a_2 = a_1 + d;$

$a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d\ ;$

$a_4 = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d;$

$a_5 = a_1 + d + d + d + d = a_1 + 4d$

$a_6 = a_1 + d + d + d + d + d = a_1 + 5d$

y siguiendo así sucesivamente, se obtendrá los demás términos, pero para determinar la cantidad de puntos que conformarán la figura décima, aplicaremos la fórmula del término general de una sucesión, la misma que se deduce de la anterior:

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ (1)

En (1) tenemos que:

$$n = \text{número de términos que intervienen en el enunciado}$$

$$a_1 = \text{primer término}$$

$$d = \text{diferencia}$$

b) *Acompañamos cada operación matemáticamente con el argumento ¿por qué lo hacemos y para qué lo hacemos?*

Se procede a sustituir en la fórmula (1), los datos conocidos, para encontrar el número de puntos de la décima figura, para ello

$$\boldsymbol{a_1 = 3}$$

$$\boldsymbol{n = 10}$$

$$\boldsymbol{d = 2}$$

$$\boldsymbol{a_{10}} = ?$$

Por lo que, sustituyendo en (1)

Se tiene

$$a_{10} = 3 + (10 - 1).2$$

Se realiza los cálculos aritméticos, en este caso de multiplicación y de suma

$$a_{10} = 3 + (9).2$$

Esto permitirá calcular la cantidad de puntos que conforman la décima figura

$a_{10} = 21 puntos.$

Examinar la solución obtenida:

a) ***¿Podemos verificar el resultado?***

Si la primera figura inicia con tres puntos y la segunda figura se incrementa con dos puntos, entonces, la décima figura será:

$$a_{10} = 3 + (9).2$$

a_{10}= 21 puntos

b) ***¿La solución es lógicamente posible?***

Se observa que el número de puntos se incrementa, por lo tanto la figura décima tendrá un número mayor de puntos.

c) ***¿Resolvemos de otra manera el mismo problema?***

En este problema podemos formar la sucesión de la siguiente manera: 3, 5, 7,9, 11, 13,…………………..

En donde,

Cada término que antecede da origen al término que precede al momento de sumar dos puntos, por lo que se puede obtener también aplicando la estrategia

$a_1 = a_1;\ \ a_2 = a_1 + d;\ a_3 = a_1 + 2d;$

$a_4 = a_1 + 3d; a_5 = a_1 + 4d; a_6 = a_1 + 5d;$

$a_7 = a_1 + 6d$

………………………………………..

$a_{10} = a_1 + 9d$

Por consiguiente el número de puntos en la décima figura es de 21 puntos.

PROBLEMA DOS

La dosis de un medicamento es 100 mg, el segundo día toma 5 miligramos menos que el día anterior ¿cuántos miligramos debe tomar el doceavo día?

Comprender el problema:

¿Qué significado tiene la progresión aritmética?

Sucesión que tiene un orden, guarda además un patrón o valor constante llamado diferencia. Esta puede ser creciente o decreciente.

a) Identificamos los datos

La dosis del medicamento está en relación de progresión aritmética.

La mayor dosis es de 100 mg que corresponde al primer día.

Cada día tomó menos 5 mg, a lo que llamaremos diferencia.

b) ¿Qué es lo que debemos determinar?

Los miligramos de medicamento que tomará el doceavo día.

c) ¿Dibujamos un diagrama en base de los datos y variables?

Primer día	Segundo día	Tercer día	Cuarto día
↓	↓	↓	↓
100 mg	95 mg	90 mg	85 mg

Concebir un plan:

a) *¿Relacionamos datos y variables?*

Fundamentados en los datos conocidos se obtendrá la cantidad de medicación del doceavo día

b) *¿Cómo podemos expresar el lenguaje natural en lenguaje matemático?*

Para ello se asignará:

primer día $\boldsymbol{a_1}$

al valor constante $\boldsymbol{d}$

entonces, el segundo día tomará la medicación en base de $\boldsymbol{a_2 = a_1 + d}$

el tercer día tomará la medicación en miligramos establecido por es $\boldsymbol{a_3 = \mathrm{a}_1 + 2\mathrm{d}}$

Para determinar un término cualquiera de posición se lo hace en base del primer término, la diferencia y el número de términos.

c) *¿Aplica conocimientos previos?*

Son aquellos que indican una posición o ubicación.

NÚMEROS ORDINALES

Son aquellos que pueden ser expresados en forma de número entero o decimal.

d) *¿Podríamos enunciar el problema de otra forma?*

Si cada día toma menos 5mg de medicamento, y si el primer día toma 100 mg, en el doceavo día ¿cuántos mg de medicamento debe tomar?

Ejecutar el plan:

a) *¿Empleamos la estrategia planificada para la solución del problema?*

De manera que cada término es igual al anterior más la diferencia. Entonces,

$a_1 = a_1;$

$a_2 = a_1 + d;$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d;$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

$a_6 = a_5 + d = a_1 + 4d + d = a_1 + 5d$

y siguiendo así sucesivamente, se obtendrá los demás términos, pero para determinar la cantidad de miligramos de medicamento en el doceavo día aplicaremos la fórmula del término general de una sucesión, la misma que se deduce de la anterior:

$a_n = a_1 + (n-1)d$ (1)

En (1) tenemos que:

$\boldsymbol{n}$ = Número de posición de los números

$\boldsymbol{a_1}$ = Primer término

$\boldsymbol{d}$ = Diferencia

b) ***Acompañamos cada operación matemáticamente con el argumento ¿por qué lo hacemos y para qué lo hacemos?***

Se procede a sustituir en la fórmula (1), los datos conocidos, y encontrar el número de puntos de la décima figura, para ello

$$a_1 = 100\ mg$$

$$n = 12$$

$$d = -5\ gm$$

$$a_{12} = ?$$

Por lo que, sustituyendo en (1)

Se tiene

$a_{12} = 100 + (12 - 1)(-5)$

Se realiza los cálculos aritméticos, en este caso de multiplicación y de suma

$$a_{12} = 100 - 55 = 45mg$$

Esto permitirá calcular los miligramos de medicamento que debe tomar el doceavo día

$$a_{12} = 45\ mg$$

Examinar la solución obtenida:

a) ***¿Podemos verificar el resultado?***

Si se inicia el primer día tomando 100 mg de medicamento y el segundo día toma 5 miligramos menos, entonces, el día doceavo tomará:

$$a_{12} = 100 - 55 = 45mg$$

$$a_{12} = 45\ mg$$

b) ¿La solución es lógicamente posible?

Si se observa que el primer día toma más miligramos que los demás días es coherente que el último día tomé menos miligramos.

c) ¿Resolvemos de otra manera el mismo problema?

En este problema podemos formar la sucesión de la siguiente manera: 100, 95, 90, 85,…………………..

En donde,

Cada término que antecede da origen al término que precede al momento de restar los miligramos del medicamento, por lo que se puede obtener también aplicando la estrategia

$\boldsymbol{a_1 = a_1}$; $\boldsymbol{a_2 = a_1 + (-d)}$; $\boldsymbol{a_3 = a_1 + (-2d)}$; $\boldsymbol{a_4 = a_1 + (-3d)}$; $\boldsymbol{a_5 = a_1 + (-4d)}$; $\boldsymbol{a_6 = a_1 + (-5d)}$; $\boldsymbol{a_7 = a_1 + (-6d)}$………………………………………

$$\boldsymbol{a_{12} = a_1 + (-11d)}$$

Por consiguiente, la cantidad de medicamento que tomará el doceavo día es de 45 mg.

PROBLEMA TRES

Una pareja madura de conejos procrea una nueva pareja cada mes, en tanto que una pareja de conejos recién nacidos tarda dos meses en procrear a su vez otra pareja. Si se tiene una pareja de conejos tiernos en un sistema aislado y se supone que ninguno muere. ¿Cuántas parejas de conejos habrá al cabo de un año?

<u>Comprender el problema:</u>

¿Cuándo los conejos empiezan a procrearse?

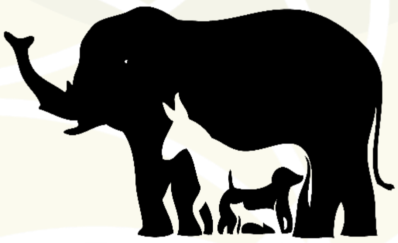
Cada dos meses de nacidos.

¿Mueren los conejos?

Según las condiciones del problema, los conejos no mueren.

¿Cada que tiempo procrean los conejos maduros?

Los conejos maduros procrean cada mes.



a) ¿Identificamos los datos?

Se conoce con cuantas parejas de conejos se inicia.

Cada que tiempo se reproducen los conejos maduros.

Cuando son jóvenes se reproducen después de un número determinado de meses.

b) ¿Qué es lo que debemos determinar?

Se debe determinar en primera instancia la ecuación de recurrencia que represente la reproducción de conejos, en base de las condiciones iniciales o de frontera, y luego la solución única de esta ecuación.

c) ¿Dibujamos un diagrama en base de los datos y variables?

Al principio	Al cabo de 1 mes
■■	■■

Dos meses

■■ ◘◘

Al cabo de 3 meses

■■ ■■ ◘◘

Al cabo de 4 meses

■■ ■■ ◘◘

■■ ◘◘

Al cabo de 5 meses

■■ ■■ ■■ ◘◘ ◘◘

■■ ■■ ◘◘

……………………………………………..

Concebir un plan:

a) ¿Relacionamos datos y variables?

Entonces, tenemos que la relación de recurrencia de los conejos de Fibonacci están constituidos por 1,1, 2, 3, 5……., esto implica que para obtener el tercer término se suma los dos términos que le preceden, por lo que, el cuarto término se obtendrá de sumar el segundo término más el tercer término y así sucesivamente; por otro lado depende del número de conejos en estado de reproducción.

b) ¿Cómo podemos expresar el lenguaje natural en lenguaje matemático?

El número de parejas de conejos se simboliza con $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}, \dots \dots \dots \dots \dots$

En este caso específico la condición inicial o de frontera está representada por $\boldsymbol{a_1 = 1}$ par de conejos

Al número de meses en los cuales se procrean, se conoce como número de términos y se simboliza con $\boldsymbol{n = meses}$

Los datos desconocidos corresponden a la ecuación de recurrencia y su única solución.

c) *¿Aplicamos conocimientos previos?*

Relación de recurrencia.- Si en una sucesión tenemos los términos $a_1, a_2, a_3 \ldots \ldots, a_n$ y el enésimo término se puede expresar en función de los términos previos $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3} \ldots \ldots, a_1$

Las condiciones iniciales son $a_1, a_2, a_3 \ldots \ldots, a_n$

Sistemas de ecuaciones lineales.- Conjunto de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, que se pueden resolver por cualquiera de los métodos: reducción, igualación, sustitución, etc.

Ecuación de segundo grado.- Una ecuación es una relación matemática entre números y letras. Es muy común trabajar con ecuaciones en las que sólo hay una letra, llamada incógnita, que suele ser la misma que está elevada al exponente dos y resolver la ecuación consiste en encontrar un valor (o varios) que, al sustituirlo por la incógnita, haga que sea cierta la igualdad. Esos valores son las soluciones de la ecuación.

Solución general.- La solución general puede ser de dos tipos, ello depende de las raíces que se obtengan en la ecuación característica, por lo que si son dos números reales distintos se aplicará la solución general siguiente

$a_n = \alpha(x_1)^n + \beta(x_2)^n$.

Pero si las raíces obtenidas son dos números reales iguales, la solución general tendrá la siguiente forma:

$a_n = \alpha(x_1)^n + \beta n(x_2)^n$.

d) *¿Podríamos enunciar el problema de otra forma?*

El número de conejos nacidos en diferentes meses, determinan las condiciones iniciales de la ecuación de recurrencia de Fibonacci, lo cual permite escribir la ecuación característica que permite obtener en un determinado mes el número de conejos que se reproducen.

Ejecutar el plan

a) *¿Empleamos la estrategia planificada para la solución del problema?*

Al observar la manera como se reproducen los conejos se deduce que al inicio, la población es de 1 pareja.

Al primer mes la pareja tierna habrá madurado, pero no tendrá hijos todavía, por lo tanto de nuevo habrá 1 pareja.

Al segundo mes, tendremos la pareja original madura y una pareja tierna, por lo tanto habrá 2 parejas.

Al tercer mes, la pareja madura habrá procreado nuevamente, en tanto que la otra pareja está alcanzando la madurez. Se tienen 3 parejas.

Para el cuarto mes, se tiene la pareja original, la cual ha tenido de nuevo hijos, sus primeros hijos, ya maduros, que también acaban de tener hijos, y los segundos hijos de los primeros conejos que acaban de alcanzar la madurez. Por lo tanto, hay 5 parejas.

En base de las condiciones inicales

Al inicio

a_0=1 pareja

$\boldsymbol{n} = 1$ mes

$\boldsymbol{a_1} =$ 1 pareja

$n = 2$ mes

$\boldsymbol{a_2} = 2$ parejas

$n = 3$ mes

$\boldsymbol{a_3} = 3$ parejas

………………………..

Pues cada término se obtiene sumando el que antecede, de manera que la ecuación de recurrencia es,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para cada } n \geq 2 \quad (1)$$

En (1) tenemos que:

$\boldsymbol{n} =$ Número de meses

$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a}_0 = 1 \text{ (parejas de conejos)} \\ \boldsymbol{a}_1 = 1 \text{ (parejas de conejos)} \end{array}\right\}$ Condiciones iniciales o de frontera

b) ***Acompañamos cada operación matemáticamente con el argumento ¿por qué lo hacemos y para qué lo hacemos?***

Se procede a sustituir en la fórmula (1), los datos de frontera, para determinar la ecuación de recurrencia y a partir de ella la ecuación característica, por lo que: este problema recursivo se resuelve, partiendo de

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para cada $n \geq 2$; $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, en donde al aplicar n=2, se tiene la ecuación característica

$$a_2 = a_1 + 1$$

y trasladando a una ecuación de uso frecuente y aplicando las propiedades de la igualdad tenemos:

$x^2 - x - 1 = 0$ (2)

Al determinar en (2) el discriminante, se establece cuál es la relación que se aplicará, es decir, depende del número de raíces que se obtenga a partir del discriminante, en este caso

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Sustituyendo

$\sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)} = \sqrt{5}$, por lo que se tendrá dos raíces

$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{5}}{2(1)}$; de donde $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_1 = 1{,}62$

y $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = -0{,}62$

Como ya se manifestó, el resultado del discriminante determina qué relación se aplica como solución general, entonces,

$a_n = \alpha(x_1)^n + \beta(x_2)^n$ (3)

Reemplazando las condiciones de frontera en (3).

Para $\boldsymbol{a_0 = 0}$, se tiene

$0 = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$ (4); además $a_1 = 1$

$1 = \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1$ (5)

Para determinar α y β se requiere de conocimientos previos de sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y se trabajará con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$0 = \alpha + \beta$ (6)

$1 = 1{,}62\alpha - 0{,}62\beta$ (7)

Aplicando el método de sustitución y la propiedad de las igualdades se tiene

$\alpha = -\beta$ (8), sustituyendo en (7)

$$1 = 1{,}62(-\beta) - 0{,}62\beta$$

$\beta = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2{,}23}}$, aplicando nuevamente propiedad de las igualdades

$\beta = -$ 0,45, sustituyendo en (8)

$$\alpha = -(-0{,}45)$$

Entonces, sustituyendo en (3)

$$a_n = \alpha(x_1)^n + \beta(x_2)^n$$

Por lo que la solución única de la ecuación de recurrencia es

$a_n =$ 0,45$(x_1)^n - 0{,}45(x_2)^n$

<u>Examinar la solución obtenida</u>:

a) ¿Podemos verificar el resultado?

En base de las condiciones iniciales, se determina la solución única de la ecuación de recurrencia.

b) ¿La solución es lógicamente posible?

Si en la solución única sustituimos por un número de mes cualquiera el resultado coincide con la relación de recurrencia de Fibonacci que es 1, 1, 2, 3, 5, 8…….

c) ¿Resolvemos de otra manera el mismo problema?

En base de las condiciones iniciales y de que cada término de la sucesión de Fibonacci se obtiene sumando los dos anteriores entonces

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad n \geq 2$$

$$a_2 = a_0 + a_1; \;\; a_2 = 0 + 1; \qquad a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2; \;\; a_3 = 1 + 1; \qquad a_3 = 2$$

$$a_4 = a_2 + a_3; \;\; a_4 = 1 + 2; \qquad a_4 = 3$$

$$\mathbf{a_5 = a_3 + a_4; \;\; a_5 = 2 + 3; \qquad a_5 = 5}$$

De manera que se puede obtener los términos de manera recursiva.

TERCERA PARTE

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS RELACIÓN DE RECURRENCIA

1. Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia homogéneas de primer y segundo grado, aplicando el Método de Polya

a) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, condiciones iniciales son $a_1 = 1, a_2 = 1$ y $n \geq 2$

b) $a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2}$, condiciones iniciales son $a_0 = 0, a_1 = 1$ y $n \geq 2$

2. Resolver los siguientes problemas de recurrencia aplicando el método de Polya

2.1. Hallar una ecuación de recurrencia para los números Triangulares y resolverla. ¿Cuáles son los números cuadrados? ¿Y los pentagonales?

2.2. Problema de las Torres de Hanói (Edouard Lucas)

Determinar na ecuación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones, si puede subir uno o dos peldaños en cada paso y resolverla.

2.3. Determine una ecuación de recurrencia para el número de regiones en que el plano puede ser dividido por n círculos, de tal manera que cada par se intersecta en exactamente 2 puntos y ningún trio se intersecta en un punto.

2.4. Un conjunto de palabras de largo n con letras en {0, 1, 2} es considerado un código legítimo si y solo si sus palabras no tienen 2 ceros consecutivos. Determine la ecuación de recurrencia que entrega el número de códigos legítimos que contienen palabras de largo n.

2.5. Encontrar una ecuación de recurrencia con la que obtener el número de formas de apilar n fichas de póquer de color rojo, blanco, verde y azul de modo que no haya fichas azules consecutivas

2.6. Sea M = {A, B, C} y sea Sn el conjunto de cadenas de longitud n formadas con las letras de M que tienen un número par de letras A consecutivas. Encuentra una relación de recurrencia para calcular Sn y resuélvela.

2.7. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de formas de estacionar motos y coches en una fila de n espacios si cada moto ocupa un espacio y cada coche ocupa dos. Las motos se consideran idénticas, los coches también y se quiere utilizar todos los espacios.

3. EVALUACIÓN:

La evaluación se realizará a través de una rúbrica con los criterios establecidos a través de los resultados de aprendizaje

4. INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Rúbrica

Criterios/ Indicadores	0 problema	1 problema	2 problemas	3 problemas	4 problemas
Identifica los datos del enunciado					
Identifica las variables del enunciado					
Plasma un gráfico acorde al enunciado					
Relaciona los datos y las variables					
Traduce las oraciones del enunciado al lenguaje algebraico					
Vincula los conceptos y habilidades con los conocimientos previos					
Expresa el enunciado del problema de otra manera					
Emplea la estrategia planificada para la solución del problema					

Argumenta el uso de los algoritmos en cada operación realizada					
Verifica los resultados					
Analiza si el resultado obtenido es coherente con el enunciado					
Sugiere alternativas diversas para resolver el mismo problema					
Vincula los términos que antecede y precede					
Intuye la respuesta de un problema de relación de recurrencia.					
Define lo que es una relación de recurrencia					
Identifica las condiciones iniciales.					
Contrasta entre sucesión y relación de recurrencia.					

5. BIBLIOGRAFÍA

Bachillerato Internacional, (2014). *Philosophyguide 2016.* Ginebra –Suiza: Organización del Bachillerato internacional. Recuperado el 22 de octubre de 2014, de http://www.xente.mundo-r.com/spinoza/filosofiaBI/programa2016.pdf

Boscán, M. y Klever, K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios, 10*(2), 7-19. Recuperado el 12 de octubre de 2014, de file:///C:/Users/MINEDUC/Downloads/Dialnet-MetodologiaBasadaEnElMetodoHeuristicoDePolyaParaEl-4496526%20(10).pdf

Bustos, N. y Moreno, S. (n.d). Propuesta taller para introducir el trabajo con sucesiones. Colombia. Universidad Distrital Francisco José De Caldas. Recuperado el 12 de enero de 2015, de http://funes.uniandes.edu.co/729/1/propuesta.pdf

Crawford, M. (2004) *Investigación, Fundamentos y Técnicas para Mejorar la Motivación y el Logro de los Estudiantes en Matemática y Ciencias*. Estados Unidos. Recuperado el 26 de diciembre de 2014, de http://www.cord.org/uploadedfiles/Teaching%20Contextually%20Spanish.pdf

Ecuador. Recuperado el 22 de noviembre de 2014, de

Escudero, J. (1999). Resolución de problemas matemáticos. España: Europa Artes Gráficas, S.A. Recuperado el 12 de abril de 2015, de http://platea.pntic.mec.es/jescuder/BLOG-1/Resolucion%20de%20problemas%20matematicos.pdf

Floréz, R. (1994). *Hacía una pedagogía del conocimiento.* McGraw-Hill. Colombia.
Fumero, Y. y Malba, A. (2007) *integración entre relaciones de recurrencia y funciones generatrices.* Recuperado el 12 de agosto de 2914, de https://www.google.com/?gws_rd=ssl#q=teoria+de+relaciones+de+recurrencia+Alberto+27+pdf.

Godino, j. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica*. España. Universidad de Granada. Recuperado el 22 de diciembre de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Marino T. y Rodríguez M. (2008). Heurísticas En La Resolución De Problemas Matemáticos: Análisis De U Caos*.* Argentina. Universidad Nacional General de Sarmiento. Recuperado el 22 de marzo de 2015, de file:///C:/Users/MINEDUC/Desktop/Concepto%20RESOLUC/polya%20importanteC36.pdf

Ministerio de educación. (2012). Estándares de calidad educativa. Ecuador. Recuperado el 14 de noviembre de 2014, de http://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2012/09/estandares_2012.pdf

Ministerio de Educación. (2012). Información básica sobre la estructura curricular del Bachillerato General Unificado. Quito. Recuperado el 23 de noviembre de 2014, de file:///C:/Users/MINEDUC/Desktop/TESIS%20ENERO/AVANCE%20DE%20TESIS/MINISTERIO%20DE%20EDUCACI%C3%93N%20INFORMACION-BGU-WEB.pdf

Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación Scielo*, *35*(73), 2. Recuperado el 17 de octubre de 2014, de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso

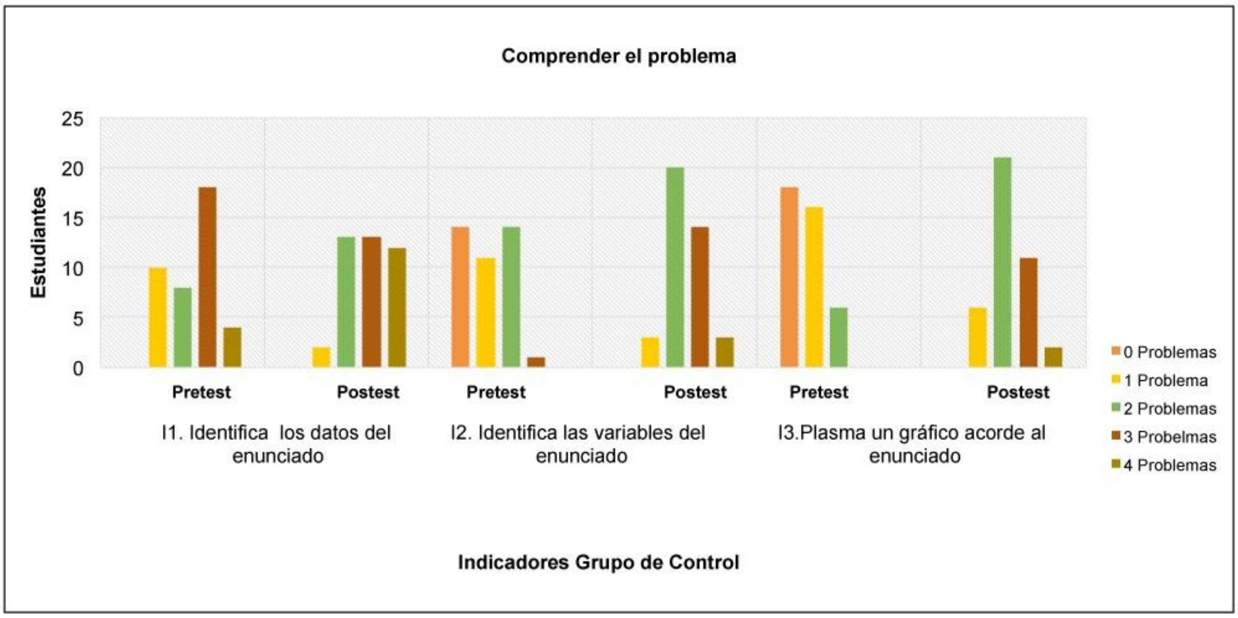
Pifarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en el eso: un ejemplo concreto. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Lleida. Recuperado el 23 de abril de 2014, de http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21745/21579

3.1.4 Resultados de la intervención.

La interpretación de datos en base de los gráficos se contrastó entre el antes y después de la intervención en cada grupo, es decir, los mismos indicadores para un grupo en base del pretest y postest, y con la relación de cuántos problemas resolvió cada estudiante aplicando los indicadores que conformaron las dos variables en estudio.

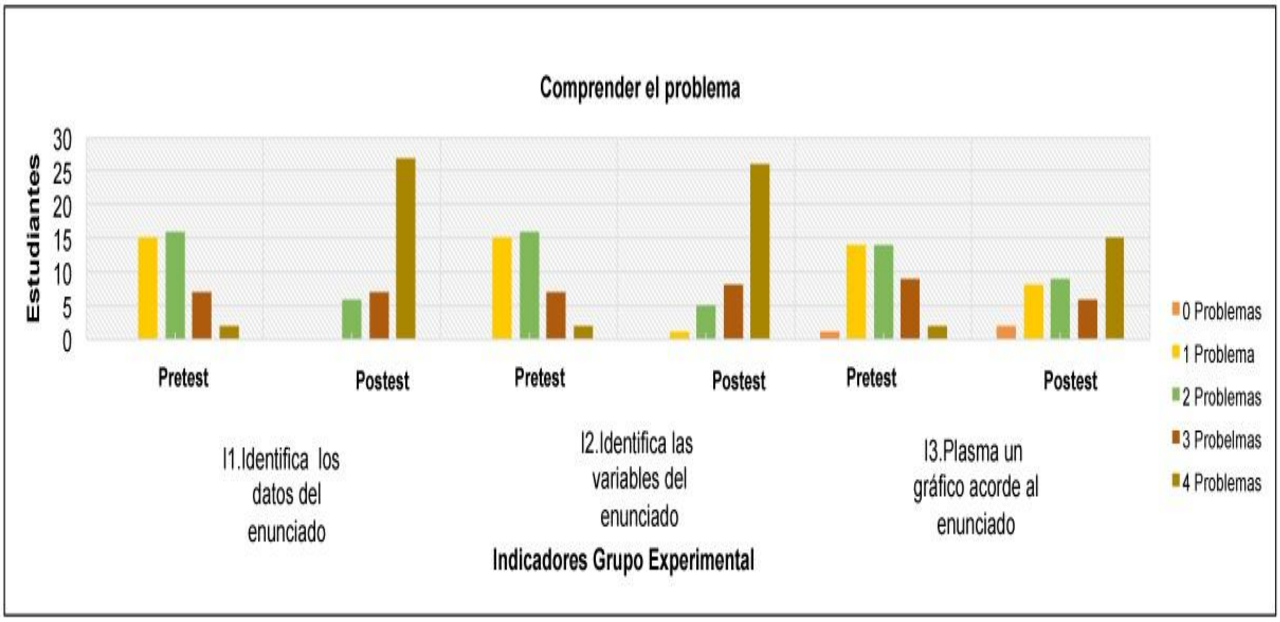
A través del análisis comparativo en la categoría: Comprender el problema al contrastar entre el pretest y postest en el grupo de control, se evidenció que los tres indicadores correspondientes a ésta categoría experimentaron cambios positivos. Por lo que, en el postest la proporción de estudiantes que aplican los indicadores se incrementa desde dos hasta cuatro problemas. Ver figura 1.

Figura 1. Grupo de control durante el Pretest y Postest, categoría: Comprender el problema.



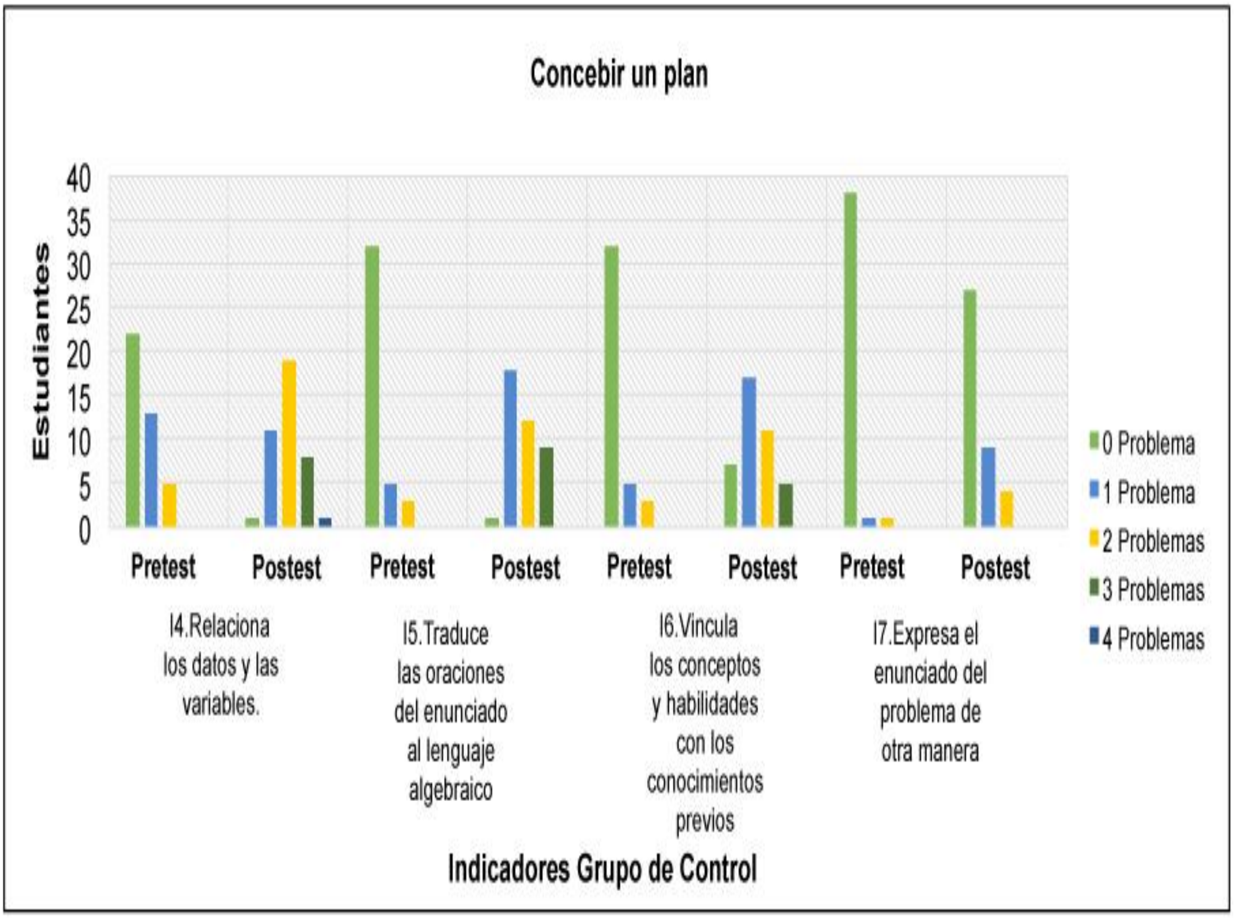
En el grupo experimental en la categoría comprender el problema; en el pretest los tres indicadores son aplicados desde un problema hasta tres problemas por la mayoría de estudiantes. Posterior a la intervención, es decir, en el postest el número de estudiantes que aplican los indicadores dos y tres se concentra la incidencia en la resolución de cuatro problemas. Ver figura 2.

Figura 2. Grupo Experimental durante el Pretest y Postest, categoría: Comprender el problema.



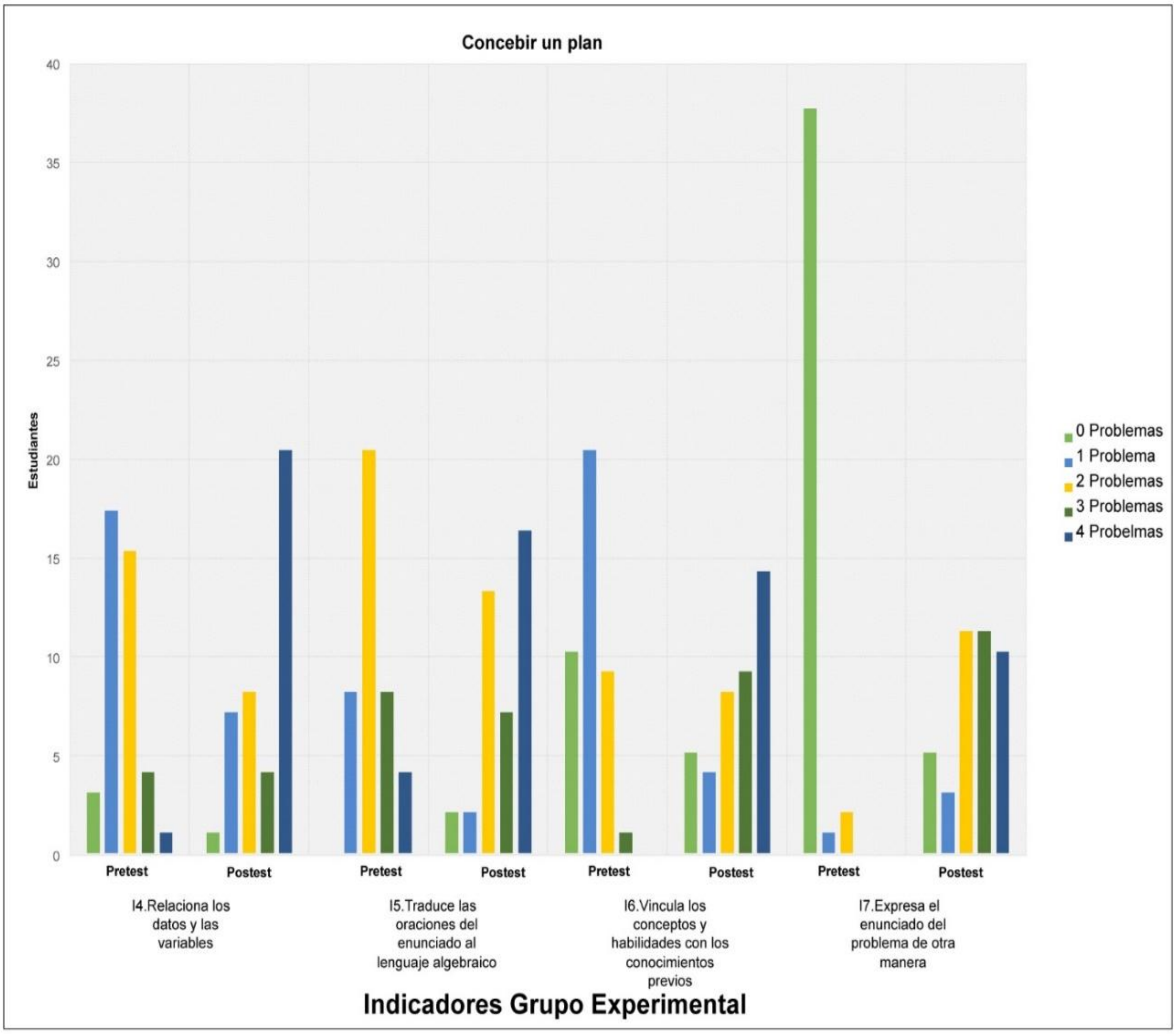
En el grupo de control en Concebir un plan; en el pretest los cuatro indicadores son aplicados para resolver los problemas en un rango de cero hasta dos problemas, por un número alto de estudiantes. En el postest luego del aprendizaje de la resolución de problemas de recurrencia, la aplicación de los tres primeros indicadores aumenta ya que un número mayor de estudiantes lo desarrollan desde un problema hasta cuatro problemas, sin embargo el número de estudiantes que no aplican el cuarto indicador disminuye con respecto al pretest. Ver figura 3.

Figura 3. Grupo de Control durante el Pretest y Postest, categoría: Concebir un plan.



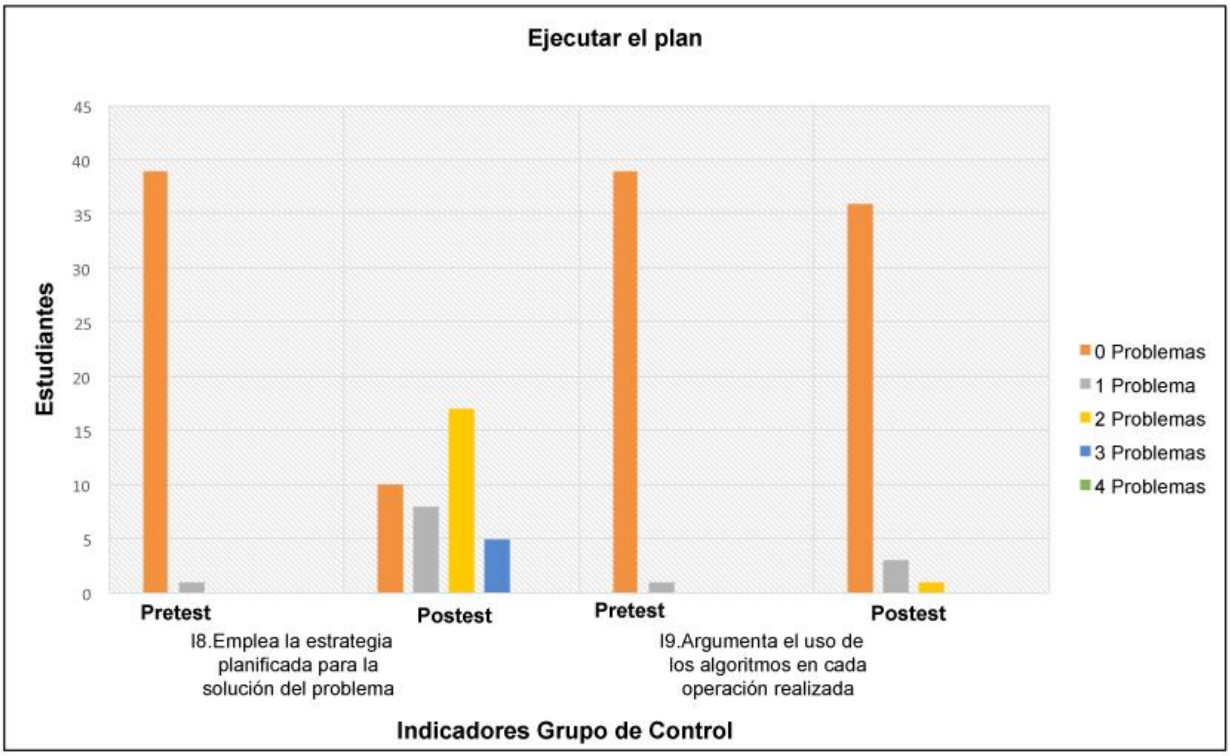
En el grupo experimental, con respecto al pretest los cuatro indicadores se concentran en la aplicación entre un problema y dos problemas, con la frecuencia de muchos estudiantes y después de la intervención estos indicadores se desplazan y se aplicó en la resolución de dos problemas en adelante. Ver figura 4.

Figura 4. Grupo Experimental durante el Pretest y Postest, para la categoría Concebir un plan.



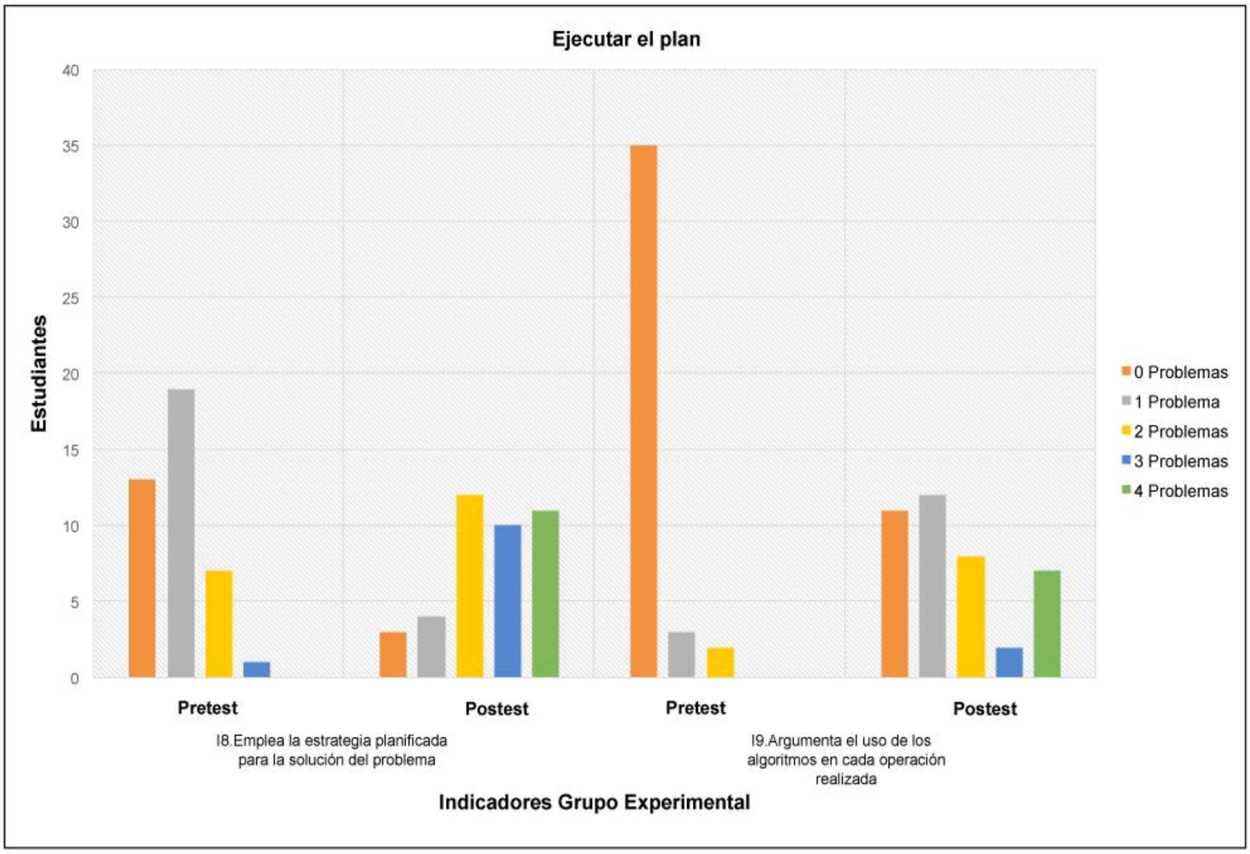
En el grupo de control, el indicador 8 no lo aplican la totalidad de estudiantes en ningún problema, pero posterior al proceso de aprendizaje se distribuye entre cero y tres problemas; situación que no sucede en el indicador 9 ya que tanto en el pretest y postest no lo aplican en su totalidad. Ver figura 5.

Figura 5. Grupo de control durante el Pretest y Postest, categoría: Ejecutar el plan.



En el postest, el grupo experimental en lo pertinente al I8 experimentó una notable modificación pues lo cumplen en dos a cuatro problemas; mientras que el I9, se aplicó desde un problema a cuatro problemas. Ver figura 6.

Figura 6. Grupo Experimental durante el Pretest y Postest, categoría: Ejecutar el plan.

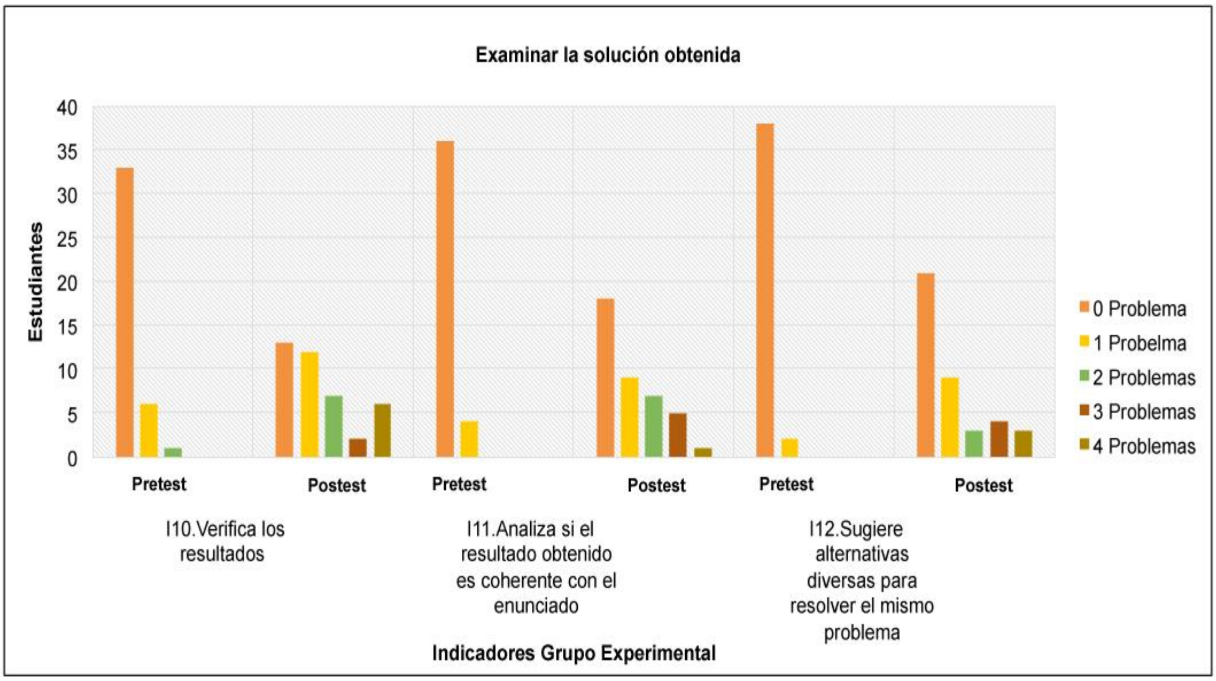


Los indicadores 10, 11, y 12 no experimentaron ninguna modificación, ya que se evidencia que el número de estudiantes en el pretest en el grupo de control no poseen las habilidades con respecto a la categoría examinar los resultados y en el postest tampoco lo hacen. Ver figura 7.

Figura 7. Grupo de Control durante el Pretest y Postest, categoría: Examinar la solución obtenida.

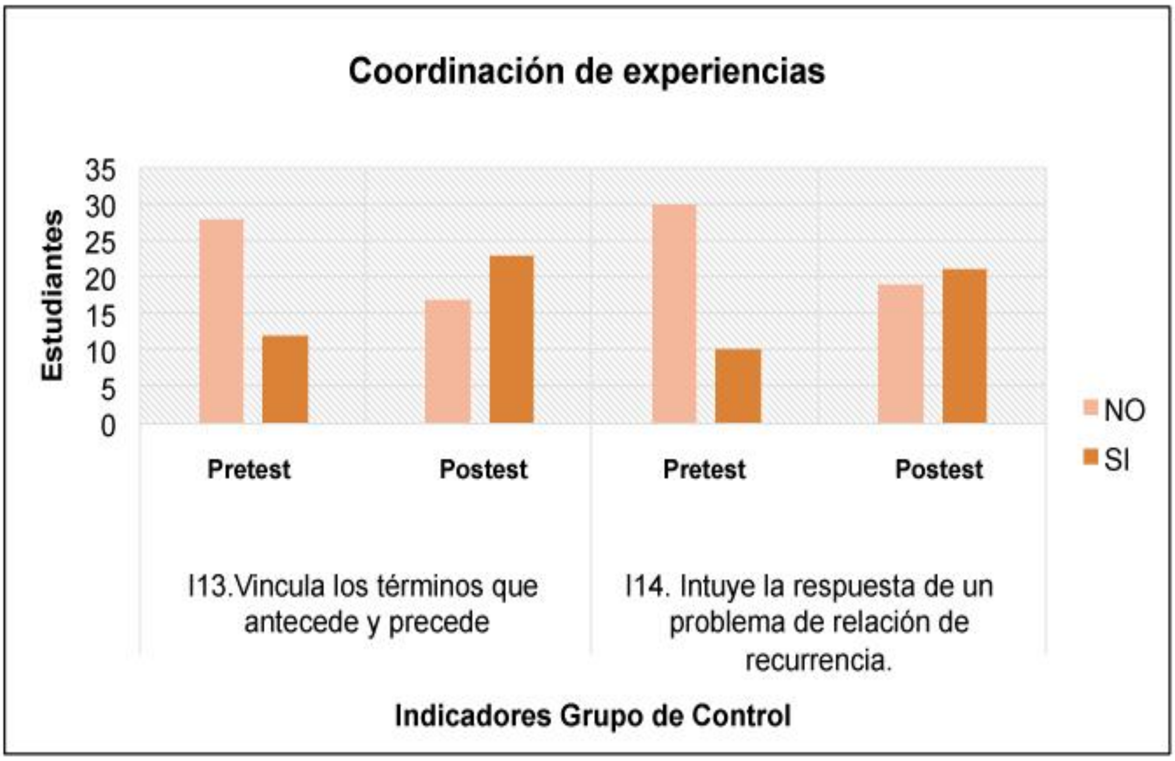
En el grupo experimental en los tres indicadores I10, I11 e I12, al inicio más de la mitad de estudiantes no se desempeñaban en los diferentes indicadores correspondientes a la categoría examinar la solución, posterior a la intervención el número de estudiantes que aplicaron la metodología se incrementó y lo hacen desde cero hasta cuatro problemas. Ver figura 8.

Figura 8. Grupo Experimental durante el Pretest y Postest, categoría: Examinar la solución.



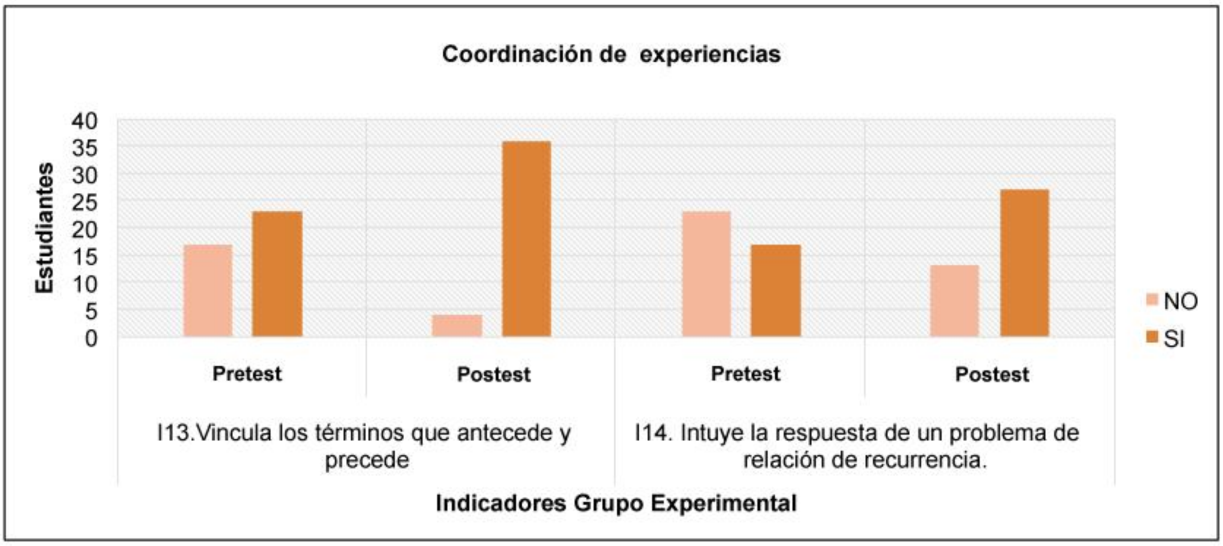
Los estudiantes que pertenecen al grupo de control no vinculan los términos de relación de recurrencia, tampoco intuyen la respuesta de problemas sin resolverlos; posterior a la ejecución de todas las actividades para el aprendizaje, los resultados experimentan una notable variación, pues ya el 50% de estudiantes aplican estos dos indicadores. Ver figura 9.

Figura 9. Grupo de Control durante el Pretest y Postest, categoría: Coordinación de experiencias



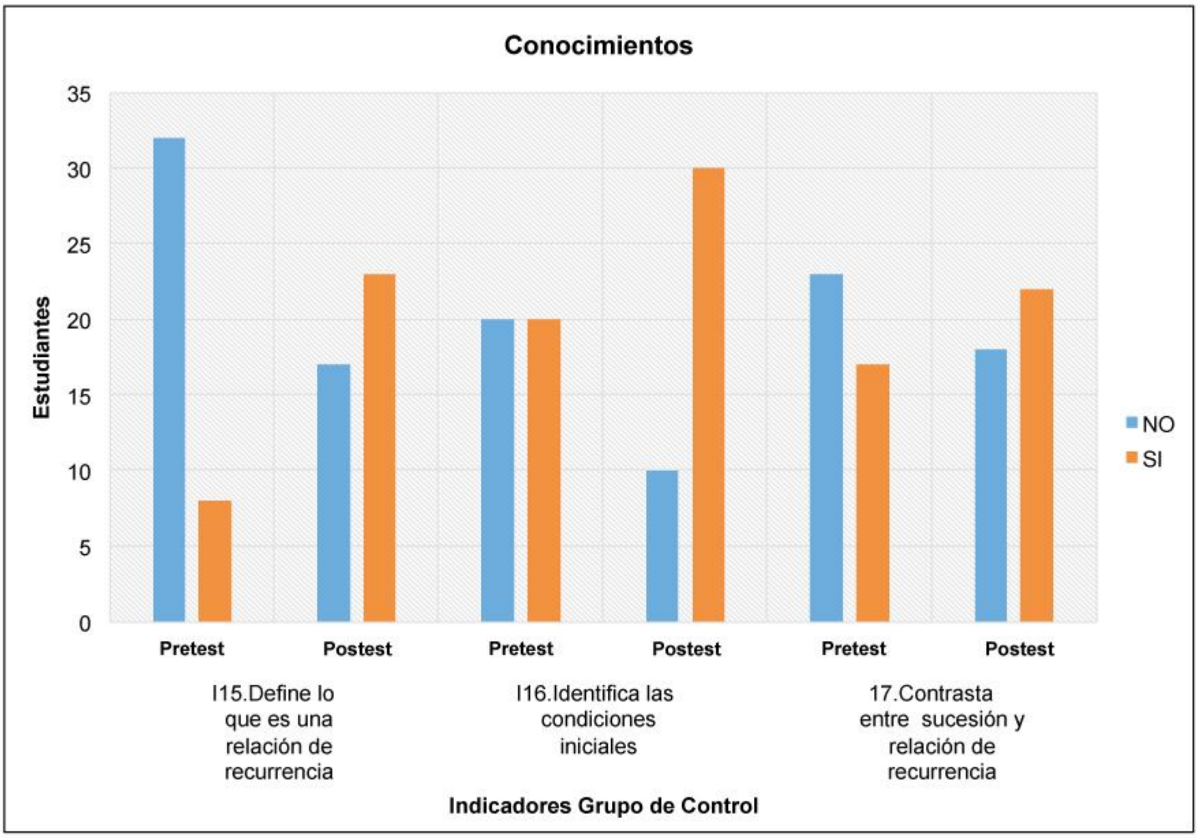
En el grupo experimental las habilidades de vincular los términos de una relación de recurrencia y de intuir la respuesta de un problema sin antes resolverlo cambió totalmente después de la intervención sobre todo en el indicador vincula los términos que antecede y precede. Ver figura 10.

Figura 10. Grupo Experimental durante el pretest y postest, categoría: Coordinación de experiencias.



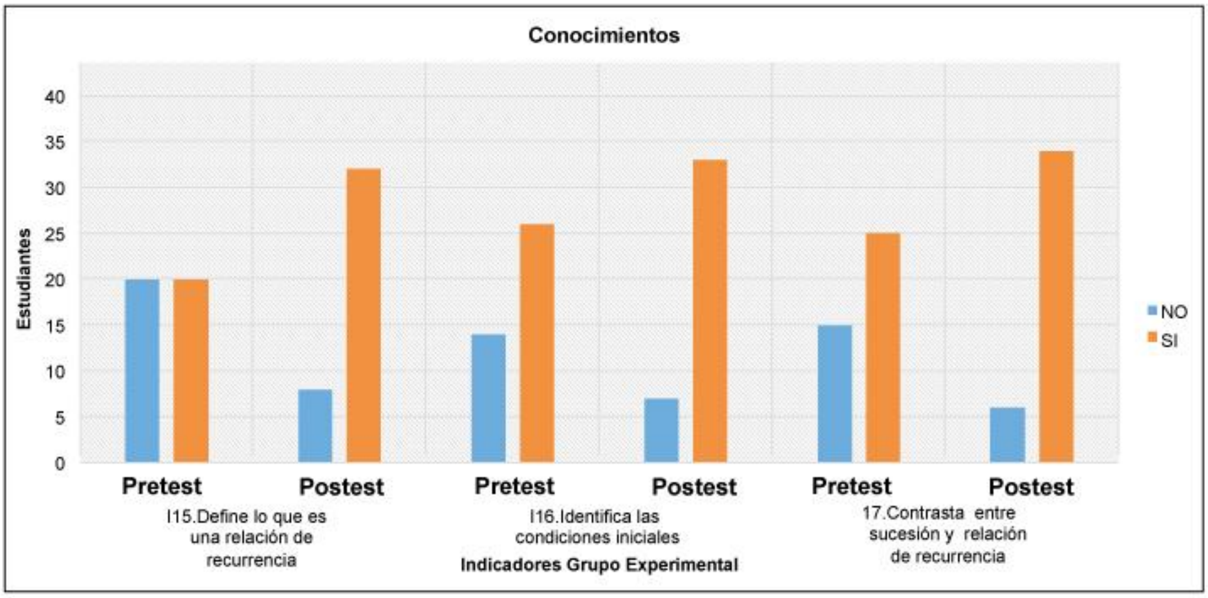
En el grupo de control los indicadores define lo que es una relación de recurrencia e identifica las condiciones iniciales, fueron aplicados por los estudiantes en un gran porcentaje después del postest, mientras que el indicador contrasta entre sucesión y relación de recurrencia experimentó una ligera modificación positiva. Ver figura 11.

Figura 11. Grupo de Control durante el Pretest y Postest, categoría: Conocimiento



En el grupo experimental, los indicadores de la categoría conocimiento después de la intervención marcaron una notoria diferencia puesto que los estudiantes desarrollaron habilidades como: definir la relación de recurrencia, identificar las condiciones y contrastar entre sucesiones y relación de recurrencia. Ver figura 12.

Figura 12. Grupo Experimental durante el Pretest y Postest, categoría: Conocimiento.



3.2 Impacto de la intervención

Los resultados que se obtuvieron antes y después del proceso de enseñanza-aprendizaje en el grupo de control en base de una planificación sin un método específico de resolución de problemas de relación de recurrencia, y en el grupo experimental bajo la aplicación del método Polya, son los siguientes:

Tabla 7. *Resultados de la variable independiente: Método heurístico de Polya*

	ESTUDIANTES											
	GRUPO DE CONTROL											
		PRETEST %				POSTEST %				PRETEST %		
	Número de Problemas	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
CATEGORÍA	Indicadores											
Comprender el problema	Identifica los datos del enunciado.		20,00	45,00	10,00		32,50	32,50	30,00	37,50	40,00	17,50
	Identifica las variables del enunciado.		35,00	2,50			50,00	35,00	7,50	37,50	40,00	17,50
	Plasma un gráfico acorde al enunciado.	40,00	15,00			15,00	52,50	27,50	5,00	35,00	35,00	22,50
Concebir un plan	Relaciona los datos y las variables.	32,50	12,50			27,50	47,50	20,00	2,50	42,50	37,50	10,00
	Traduce las oraciones del lenguaje natural al lenguaje algebraico.	12,50	7,50			45,00	30,00	22,50		20,00	50,00	20,00
	Vincula los conceptos y habilidades con los conocimientos previos.	12,50	7,50			42,50	27,50	12,50		50,00	22,50	2,50
	Expresa el enunciado del problema de otra manera.	2,50	2,50			22,50	10,00			2,50	5,00	
Ejecutar el plan	Emplea la estrategia planificada para la solución del problema.	2,50				20,00	42,50	12,50		47,50	17,50	2,50
	Argumenta el uso de los algoritmos en cada operación realizada.	2,50				7,50	2,50			7,50	5,00	
Examinar la solución obtenida	Verifica los resultados.	2,50								15,00	2,50	
	Analiza si el resultado obtenido es coherente con el enunciado.									10,00		
	Sugiere alternativas diversas para resolver el mismo problema.									5,00		

Tabla 8. *Resultados de la variable dependiente: resolución de problemas de relación de recurrencia*

		ESTUDIANTES							
		GRUPO DE CONTROL				GRUPO EXPERIMENTA			
		PRETEST		POSTEST		PRETEST		POSTES	
INDICADORES	PREGUNTAS	NO %	SI %	NO %	SI %	NO %	SI %	NO %	S
Coordinación de experiencias previas	Vincula los términos que antecede y precede.	70,00	30,00	42,50	57,50	42,50	57,50	10,00	9
	Intuye la respuesta de un problema de relacion de recurrencia.	75,00	25,00	47,50	52,50	57,50	42,50	32,50	6
Conocimientos	Define lo que es una relación de recurrencia.	80,00	20,00	42,50	57,50	50,00	50,00	20,00	8
	Identifica las condiciones iniciales.	50,00	50,00	45,00	55,00	35,00	65,00	17,50	8
	Contrasta entre sucesión y relación de recurrencia.	57,50	42,50	45,00	55,00	37,50	62,50	15,00	8

3.3 Discusión

El método heurístico de Polya, proporciona ventajas en el proceso del aprendizaje de resolución de problemas de relación de recurrencia, ya que, en los resultados se evidencia avances muy significativos; debido a que los estudiantes del grupo experimental, conjugan toda la creatividad y la producción de ideas; para resolver problemas del contexto o de situaciones nuevas y diferentes.

En la investigación realizada por la Escuela Superior Politécnica del Litoral, posterior a la intervención, y basada en un taller pedagógico, los estudiantes resuelven los problemas de función exponencial y logarítmica y alcanzan un porcentaje superior al 85%, en las categorías: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y examinar la solución obtenida. Mientras, que en la Unidad educativa Chordeleg el grupo experimental, con el apoyo de la guía didáctica, obtiene como resultado un porcentaje inferior a 67,50%.

La Escuela Superior Politécnica del Litoral desarrollaron los problemas de función exponencial y logarítmica siguiendo una secuencia lógica, pero sin ninguna argumentación; en contraste con la unidad educativa Chordeleg, en donde se aplicó un postest y en cada problema se debió argumentar el proceso correspondiente a las diferentes categorías con sus respectivos indicadores; tanto, en la variable dependiente como independiente; lo cual se logró, a través del trabajo colaborativo, en donde lo importante fue la praxis del descubrimiento, indagación, argumentación, reflexión, conceptualización y el debate; pero sobre todo la valoración del aprendizaje de resolución de problemas matemáticos contextualizados.

En la investigación efectuada en el estudio de caso, por la Institución Educativa Máximo Mercado de Colombia, en el pretest, los estudiantes, en las categorías: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida, alcanzan un porcentaje desde 17,14% hasta 62,86%; en tanto, la unidad educativa Chordeleg, el grupo experimental obtiene un porcentaje de 2,50 hasta 50,00%. Estos resultados obedecen a que en la institución educativa Mercado, se aplicó cinco problemas de selección múltiple con única respuesta, mientras, que en la unidad educativa Chordeleg, se aplicó un instrumento con cuatro problemas y en cada uno de ellos se debía aplicar los diferentes indicadores de manera desagregada.

Los estudiantes de la unidad educativa Chordeleg, presentaron dificultades en lectura comprensiva, puesto que no existió una vinculación directa entre las asignaturas de Lenguaje y Matemática. Además, en clases de Matemática se consideró al estudiante como un ente pasivo y no se motivó para lograr que los estudiantes razonen, argumenten y reflexionen; puesto que el objetivo primordial fue la mecanización y memorización.

En el postest, la Institución Educativa Máximo Mercado, obtiene un porcentaje entre el 60,00% y 91,43%; no obstante, la unidad educativa Chordeleg, consigue un porcentaje de 2,50 % hasta 67,50%; a partir de ello, se deduce que en la institución educativa Máximo Mercado, los resultados fueron muy significativos; sin embargo, en la unidad educativa Chordeleg, a pesar del porcentaje obtenido, se experimentó un fortalecimiento en cada indicador, debido a que existió la decisión por parte de los estudiantes de involucrarse, mediante el trabajo colaborativo; en donde la generación de ideas para establecer los datos, variable, hacer un gráfico, fue fundamental, el respeto a las ideas ajenas se fortaleció y la confrontación dieron paso a la argumentación, y reflexión; con la posterior toma de decisiones para aplicar el plan trazado, así como, procedieron a verificar si los resultados guardaban coherencia con el enunciado.

El grupo de control de la unidad educativa Chordeleg, en las categorías: comprender el problema, concebir un plan y ejecutar el plan; obtiene un porcentaje entre 2,50 % y 47,50%, y lo cumplen entre 1 a 2 problemas, en el pretest; por su parte el grupo experimental lo hace desde uno a cuatro problemas, desde 2,50% hasta 50%; pero además, lo cumple con la categoría examinar la solución obtenida, en un problema. En el pretest se evidenciaron diferencias fundamentales entre los dos grupos, así, en el grupo de control los estudiantes aplicaron los diferentes indicadores, en base del bagaje conocimientos previos con los cuales contaban; pero lo hicieron de manera mecánica y memorística, es decir, por repetición. En cambio, los estudiantes del grupo experimental desarrollaron cada problema aplicando sus conocimientos previos, aplicaron las experiencias previas con creatividad, argumentación y secuencia lógica, es decir, se esforzaron para recordar procesos interiorizados anteriormente.

En el postest, el grupo de control cumplen con los indicadores de las diferentes categorías: comprender el problema, concebir un plan y ejecutar el plan, en un porcentaje que va desde 2,50% hasta 52,50% y de 1 a 4 problemas; mientras que el grupo experimental obtiene un porcentaje de 2,50% hasta 67,50%; desde 1 a 4 problemas; además a ello adicionan la categoría examinar la solución obtenida.

Entonces, en el postest con respecto a las diferentes categorías de la variable dependiente, los estudiantes del grupo de control lo cumplen en menor porcentaje, que el grupo experimental, pues, en el primer grupo se trabajó con el modelo tradicional, en donde el docente es quien poseía todos los conocimientos, el rol del estudiante fue pasiva, es decir, no se involucró en el aprendizaje, se generó ideas escasamente, la creatividad fue mínimo. En el grupo experimental, aconteció todo lo contario; el salón de clase se convirtió en un espacio para la generación de ideas, se dio oportunidad para que planteen estrategias para resolver problemas, se monitoreó cada proceso, los estudiantes a través de conversatorios tomaron decisiones, es decir, que fue el estudiante quien aprendió haciendo, entonces, el trabajo colaborativo fortaleció los valores y la empatía entre los estudiantes y docente

En cuanto a los indicadores de la variable dependiente: resolución de problemas de relación de recurrencia; en el pretest; los estudiantes de los dos grupos lo cumplen, aunque el grupo de control lo aplica en un porcentaje inferior a 42,50%; a diferencia del grupo experimental, que lo hace en un porcentaje superior a 42,50%; esta diferencia se fundamentó, en que los estudiantes del grupo experimental intentaron recuperar los conocimientos previos y de allí de manera comparativa fueron desarrollando las preguntas planteadas.

Los dos grupos considerados en la investigación, es decir, el de control y experimental; en el postest, incrementan notablemente en la aplicación de los diferentes indicadores de la variable dependiente, esto se debió, a que cada paralelo ya trabajó sobre la resolución de problemas de relación de recurrencia y la primordial diferencia se dio cuando el grupo experimental alcanzó un porcentaje superior al 67,50%; esto se justificó con el hecho de que recibieron el apoyo de la intervención con el método heurístico de Polya, en base del marco teórico del modelo cognitivo; lo cual avocó enfrentar hechos nuevos y diferentes, lo que produjo un desequilibrio cognitivo, dando lugar a la conexión entre los conocimientos previos y nuevos; provocando de esta manera un aprendizaje duradero.

El impacto del método heurístico de Polya en la resolución de problemas de recurrencia, fue muy significativo, ya que un gran número de estudiantes estuvieron siempre motivados y lograron interiorizar las categorías e indicadores correspondientes a las dos variables; ya que, al continuar con el avance de la malla curricular y al momento de resolver problemas de límites, derivadas, interés compuesto; aplicaron esta método, lo cual brindó confianza, seguridad y coherencia en el proceso; además, aceptaron que esto no era únicamente para resolver problemas recursivos, sino muy por el contrario, consideraron como apoyo para cualquier situación de la vida cotidiana.

Este trabajo contribuirá de alguna manera, al proyecto integrado de educación general básica, que se implementará para fortalecer el Programa del Diploma del Bachillerato Internacional; en favor de los estudiantes de básica superior, pues son los potenciales candidatos para formar parte de este programa, por lo que, se requiere de manera innegable desarrollar habilidades de indagación, argumentación, de conceptualización, reflexión y de confrontación, que permitan resolver problemas en las diferentes asignaturas.

Con el propósito fundamental de mejorar el desempeño de los estudiantes de tercer año de bachillerato general unificado en los exámenes Ser Bachiller, la institución aplicará el método heurístico de Polya, para cubrir las necesidades de razonamiento lógico, abstracto y numérico.

3.3.1 Conclusiones.

El objetivo del presente trabajo de investigación, fue determinar el impacto del método heurístico de Polya en la resolución de problemas de relación de recurrencia; para ello se estableció un grupo de control y experimental, así como, se analizó los resultados obtenidos por la Escuela Politécnica del Litoral y el instituto Máximo Mercado; además, se elaboró instrumentos de evaluación y se aplicó como pretest y postest; así como se creó espacios colaborativos, con la finalidad de que los estudiantes interactúen entre ellos, en base de sus experiencias y generación de ideas, para que se apropien del aprendizaje significativo.

La conceptualización del marco teórico es primordial, ya que en él se fundamenta, la posibilidad de avanzar en el desarrollo de ciertas habilidades, para resolver problemas de relación de recurrencia, específicamente con: el método heurístico de Polya y el modelo pedagógico cognitivo; pues, ubica al estudiante en el centro del proceso de enseñanza aprendizaje, con la influencia del entorno.

Los resultados que se obtiene después de la intervención, son muy significativos de manera similar a lo que consiguió la Escuela Superior Politécnica del Litoral de Ecuador y el instituto Máximo Mercado de Colombia; a pesar de que las variables independientes son totalmente diferentes, puesto que, en la primera institución la intervención se vincula con la función exponencial y logarítmica; en el segundo Centro Educativo, se refiere a la resolución de problemas matemáticos en general y en la unidad educativa Chordeleg, se relaciona con la resolución de problemas de relación de recurrencia; pero que al final confluyeron en la variable independiente que es el método heurístico de Polya.

En el pretest, los estudiantes del grupo de control y experimental, evidencian que los conocimientos previos, que poseen para cumplir con las diferentes categorías e indicadores de la variable dependiente e independiente son escasos; ya que no cuentan con un método específico para resolver problemas y lo hacen de manera repetitiva.

En el postest, el grupo experimental aplica el método heurístico de Polya, para resolver problemas de relación de recurrencia, de manera argumentada y lógica; mientras que los estudiantes del grupo de control, reproducen procesos aplicados en el pretest de manera desordenada y sin fundamento.

A pesar de las diferencias entre el grupo de control y experimental, es fundamental, expresar que los estudiantes del primer grupo, después del aprendizaje de la resolución de problemas de relación de recurrencia en base del modelo tradicional y del grupo experimental, posterior a la intervención acerca del método heurístico de Polya en la resolución de problemas de relación de recurrencia; avanzaron y modificaron positivamente su desempeño; lo que implicó en el primer caso, que estuvieron predispuestos al aprendizaje y en el segundo grupo motivados para el trabajo colaborativo, la generación de ideas, la reflexión, es decir, aprender haciendo; ya que se trabajó con problemas del contexto.

Los estudiantes del grupo experimental asumieron un nuevo reto y dieron paso a la flexibilidad de pensamiento, otorgando valor al aprendizaje de resolver problemas de relación de recurrencia con el método de Polya, aplicando aportes teóricos del modelo pedagógico cognitivo.

La implementación de la guía didáctica con el grupo experimental es de mucha utilidad, ya que en base de los problemas reales, se despierta el interés de los estudiantes; así como existe la posibilidad de volver a revisar y analizar las diferentes fases del método heurístico de Polya; lo que permite seguir de esta manera paso a paso la solución de los diferentes problemas, propiciando el trabajo colaborativo en este caso en parejas; con lo que, se potencia el aprendizaje y cada estudiante se siente seguro de su aporte en cada pareja.

El diseño de la guía didáctica es de mucho aprendizaje para el maestrante investigador, ya que en la práctica diaria el docente aplica algunos indicadores que conforman el método heurístico de Polya, sin embargo, los indicadores correspondientes a la categoría examinar los resultados obtenidos: verifica los resultados, analiza si el resultado obtenido es coherente con el enunciado y sugiere alternativas de solución; no se cumple de manera constante.

Al promover el interés por la Matemática, a través de la argumentación y aplicación en problemas cotidianos y de interdisciplinariedad, se observa que el ambiente en el aula se transforma en un escenario totalmente proactivo, donde surgen: ideas, discusiones, aceptación de ideas ajenas y reflexiones; pero sobre todo el trabajo colaborativo se vigoriza y el bien común se convierte en el eje motor, puesto que la conceptualización del modelo cognitivo, el método heurístico de Polya y la resolución de problemas de relación de recurrencia, refuerza valores de solidaridad y responsabilidad; lo cual contrasta con el ambiente pasivo, ya que, es el estudiante quien aprende haciendo y el docente es quien lo guía.

Finalmente, la mayoría de estudiantes del grupo experimental, al momento de vivir esta experiencia de aprendizaje, valoran esta situación, ya que al involucrarse en el proceso de enseñanza - aprendizaje, los resultados de los mismos son de mayor significado y permanencia en el tiempo.

3.3.2 Recomendaciones.

Es fundamental, hacer hincapié que este trabajo de investigación tiene una proyección hipotética para ser investigado en diferentes aristas o elementos, tales como: ¿Cuánto beneficia la edad de los estudiantes, en el aprendizaje del método heurístico de Polya en la resolución de problemas matemáticos?, ¿Cómo favorece el género en el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas de recurrencia?, ¿Cuál es la función de la motivación intrínseca y extrínseca para optimizar el tiempo de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos?.

Aplicar un pretest para evidenciar los conocimientos previos con los cuales cuentan los estudiantes para resolver problemas matemáticos en general.

Que el docente investigador, no trabaje en ninguno de los grupos que intervienen en la investigación, de forma que se obtenga resultados más acercados a la realidad y de manera objetiva.

En la planeación y ejecución de los diferentes proyectos, que cada área presenta en la rendición de cuentas; se dé primacía al trabajo colaborativo; de tal forma que los propios estudiantes sean los gestores del aprendizaje, a través de: la creatividad, generación de ideas, toma de decisiones; propiciando que la comunicación sea asertiva e intrapersonal, generando de esta manera la inclusión.

En el concurso Zhirogallo matemático, emprendido por la unidad educativa Chordeleg, en el circuito 01D04C07; dar espacio para que los estudiantes y profesores, fortalezcan la vinculación intrapersonal y demuestren las habilidades de argumentación, razonamiento y reflexión, para resolver problemas matemáticos.

Fomentar el interés por la Matemática a través de la motivación: presentando videos relacionados con la utilidad de contar con un método para resolver problemas, con la escritura de poemas, ensayos y juegos lúdicos.

Vincular actividades que potencien las habilidades de lectura comprensiva; aplicando de esta manera la interdisciplinariedad entre Matemática y Lenguaje.

3.3.3 Limitaciones.

En el pilotaje el tiempo establecido para rendir el pretest y postest fue evaluado como el apropiado, sin embargo, para el grupo experimental no lo fue, ya requerían más tiempo para aplicar todos los indicadores de las variables: dependiente e independiente, hasta cuatro problemas; lo que disminuyó las posibilidades de hacerlo de manera eficiente.

Al inicio de la intervención, se encontraron diversos problemas relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje de resolución de problemas; puesto que, diariamente en el salón de clases lo que se imparte es la resolución de ejercicios y de manera esporádica la resolución de problemas matemáticos similares; por lo que, la mayoría de estudiantes del grupo experimental, no estuvieron predispuestos a cambiar con los esquemas mentales, puesto que en base de sus experiencias, querían resolver los problemas de manera desordenada, sin argumentación, poca vinculación entre los conocimientos previos y nuevos, pero sobre todo sin validar sus resultados, es decir, pretendían resolver problemas sin mayor esfuerzo.

Actualmente la sociedad se encuentra bien siempre y cuando, no se abandone la zona de confort. Así entonces, los estudiantes del grupo experimental, tomaron una actitud de pesimismo ante una situación nueva.

Finalmente, el escaso desarrollo de tesis de maestrías vinculadas con el método heurístico de Polya en la resolución de problemas matemáticos, en Ecuador; limitó la contrastación y comparación de resultados obtenidos.

Referencias, bibliografía

Almeida, G. (2012). *constructivismo pdf.* Recuperado el 20 de 05 de 2015, de http://escuelainteligente.edu.ec/docs/constructivismo.pdf

Alonso, I. (enero de 2012). Recuperado el martes de febrero de 2016, de www.iberomat.uji.es/carpeta/posters/isabel_alonso.doc

Amate, J. (2001). La escuela que tenemos. La escuela que queremos. *Revista de Cooperación Educativa, 70*, 10-14.

Ardón, D. (enero de 2012). Enseñanza de estrategias de elaboración dentro de la asignatura de Matemática y su influencia en la competencia de resolución de problemas en alumnos de quinto de bachillerato. Guatemala. Recuperado el 18 de enero de 2016

Benítez, C. (jueves de Diciembre de 2012). *Didáctica, Educación Social: Modelo Sociocrítico*. Recuperado el 25 de 03 de 2016, de http://crisbenchia.blogspot.com/2012/12/v-behaviorurldefaultvmlo.html

Crawford, M. (2004). *Teaching Contextually Spanish.pdf.* Recuperado el 26 de Diciembre de 2014, de http://www.cord.org/uploadedfiles/Teaching%20Contextually%20Spanish.pdf

Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas.* Navarra, España. Recuperado el 20 de 04 de 2016, de https://www.edu.xunta.es/centros/ceipisaacperal/system/files/matematicas.pdf

Educación, M. d. (2013). *Matemática GÜÍA DEL DOCENTE.* (J. P. Salcedo, Ed.) Quito, Ecuador: Maya Ediciones C. Ltda. Recuperado el lunes 23 de abril de 2015

Fontalvo, M. (25 de Marzo de 2010). *Scribd.* Recuperado el 21 de Abril de 2016, de https://es.scribd.com/doc/28901964/Enfoque-Pedagogico-Socio-Critico

Fuentes, X. (2008). Resolución de Problemas Matemáticos. *RIECE-Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 6*(3), 36-58. Recuperado el Lunes 18 de Abril de 2016, de http://www.redalyc.org/pdf/551/55160303.pdf

Fumero, A. (2007). *22 Alberto.pdf.* Recuperado el 12 de Agosto de 2014, de http://www.soarem.org.ar/Documentos/22%20Alberto.pdf

Godino, J. (2010). *Perspectiva.* Recuperado el 22 de Diciembre de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Hernández, G. (2012). Recuperado el 18 de 03 de 2015, de http://ldc.usb.ve/~carrasquel/recFG.pdf

Klever, M. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios, 10*(2), 7-19.

Maldonado, M. (2007). El trabajo colaborativo en el aula universitario. (U. P. Experimental, Ed.) *Revista de Educación Laurus, 13*(27), 263-278. Recuperado el 25 de 02 de 2016, de http://www.redalyc.org/pdf/761/76102314.pdf

Marino. (2008). *Heurísticas en la Resolución de Problemas Matemáticos: Análisis de U Caos.* Argentina, Argentina: Universidad Nacional Genenral de Sarmiento. Recuperado el 22 de 03 de 2015, de file:///C:/Users/MINEDUC/Desktop/Concepto%20RESOLUC/polya%20importanteC36.pdf

Ministerio de Educación. (2012a). Estándares de calidad educativa. 6. Quito, Ecuador.

Ministerio de Educación. (2013b). *LINEAMIENTOS CURRICULARES PARA EL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO.*

Moreira, M. (1997). APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: UN CONCEPTO SUBYACENTE., (pág. 26). Burgos. Recuperado el 27 de 09 de 2015, de http://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigsubesp.pdf

Moreira, M. (1997). APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: UN CONCEPTO SUBYACENTE. *Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo*, (págs. 19-44).

Nieto, J. (2005). Resolución de problemas matemáticos y computación. *Redalyc, 2*(2), 37-45. Recuperado el 23 de 03 de 2016, de http://www.redalyc.org/pdf/823/82320204.pdf

Pérez, J., & Gardey, A. (2013). Recuperado el 22 de 09 de 2016, de http://definicion.de/problemas-matematicos/

Pérez, Y. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Investigación Scielo, 35*(73), 2. Recuperado el 17 de Octubre de 2014, de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009

Perkins, D. (1997). *La escuela inteligente del adiestramiento de la memoria a la educación en la mente.* (Gedisa, Ed.) Recuperado el 01 de 02 de 2015, de Libro de la escuela inteligente -Ugel05: http://www.ugel05.edu.pe/ckfinder/files/la-escuela-inteligente-perkins.pdf

Pico, L. (2012). Trabajo colaborativo. Buenos Aires. Recuperado el 12 de 02 de 2016, de http://bibliotecadigital.educ.ar/uploads/contents/trabajos_colaborativos0.pdf

Posso, M. (24 de 07 de 2012). *SliderShare.* Recuperado el 18 de 03 de 2015, de http://es.slideshare.net/videoconferencias/modelos-pedaggicos-y-diseo-curricular-8346165

Ramírez, J. P. (Agosto de 2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Investigación Scielo, 35* (73), 2.

Rivero, M. (2014). *TEORÍA GENÉTICA: CONSTRUCTIVISMO COGNITIVO .* Recuperado el 24 de 03 de 2015, de http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/32321/6/Teoria%20de%20Jean%20Piaget.pdf

Rodríguez, J. (2006). Lacresolución de problemas una visión histórica didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 23*(1), 53. Recuperado el 22 de noviembre de 2014, de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol13/pruesga.pdf

Rodrígüez, J. (Enero de 2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación, 342*, 257-286. Recuperado el Sábado 30 de Abril de 2016, de http://www.revistaeducacion.mec.es/re342/re342_13.pdf

Ruiz. (2013). La teoría de la expereincia de John Dewey: significación histórica y vigencai en el dabate teórico contemporáneo. *11*(15), 103-104. doi:http://dx.doi.org/10.14516/fde.2013.011.015.005

Segura, A. (07 de 2003). Recuperado el 24 de 04 de 2016, de http://www.sld.cu/galerias/pdf/sitios/renacip/disenos_cuasiexperimentales.pdf

Torres, B. (viernes de Octubre de 2015). *Planificación.* doi:http://planificacionmomboy3.blogspot.com/2015/10/caracteristicas-sociocritico-y-su.html

Valle, M. (14 de Agosto de 2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación, 9*(2), 5.

Vílchez, E. (2009). Resolución de relaciones de recurencia lineales homogéneas, con coeficientes constantes a través de valores y vectores propios. *Revista digital Matemática Educativa, 10*(1), 20. Recuperado el 19 de Septiembre de 2014, de https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V10_N1_2009/RESOLUCION_RELACIONES_RECURRENCIA/Resoluciondere laciones derecurrencia.pdf

Vinueza, A. (2012). Realidad de la práctica pedagógica y curricular en la escuela particular. Quito, Ecuador. Recuperado el martes de Abril de 2016, de http://dspace.utpl.edu.ec/bitstream/123456789/3209/1/Tesis%20de%20Vinueza%20Arroyo%20Alexandra%20Elizabeth.pdf

Zubiría. (1999b). *Tratado de Pedagogía Conceptual: Modelos Pedagógicos.* Bogotá, Colombia: Fundación Alberto Merani. Recuperado el 20 de 10 de 2014, de http://www.institutomerani.edu.co/publicaciones/articulos/que-modelo-pedagogico-subyace.pdf

Zubiría. (2006a). *Modelos pedagógicos: hacia una pedagogía dialogante* (Segunda ed.). Bogotá, Colombia: COOPERATIVA EDITORIAL MAGISTERIO. Recuperado el 12 de 02 de 2015, de https://books.google.com.ec/books?id=wyYnHpDT17AC&pg=PA111&lpg=PA111&dq=Se+aprende+haciendo+decroly&source=bl&ots=nb_y4_BS3c&sig=q_MNhtRKzLSX_tQw89BECxCGRtc&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwiMz8WOq8jMAhWHWh4KHXcsAsEQ6AEIQjAH#v=onepage&q=Se%20aprende%20haciendo%20dec

Anexo 1. Aval de autoridad

CONSENTIMIENTO INFORMADO

	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA TRABAJO DE INVESTIGACIÓN		
		Fecha:	21-10-2015

TITULO: Guía Didáctica del bloque de Número y Funciones, con la resolución de problemas de relación de recurrencia, basado en el método heurístico de Poyla orientada hacia los estudiantes de tercer año de bachillerato general unificado

INVESTIGADORA: María Mercedes Lazo Carpio

NÚMEROS DE TELÉFONO ASOCIADOS A LA INVESTIGACIÓN:

Fijo: 4074801 móvil: 0998780194

LUGAR:

Unidad Educativa Chordeleg-Azuay-Ecuador

Estas hojas de Consentimiento Informado pueden contener palabras que usted no entienda. Por favor pregunte al investigador para que le explique cualquier palabra o información que usted no entienda claramente. Usted puede llevarse a su casa una copia de este consentimiento para pensar sobre esta investigación o para discutir el Honorable Consejo Ejecutivo antes de tomar su decisión.

INTRODUCCION:

Usted ha sido comunicado para autorizar la aplicación de la investigación metodológica sobre el método heurístico de Polya. Antes de que usted decida autorizar la investigación, por favor lea este consentimiento cuidadosamente. Haga todas las preguntas que usted tenga, para asegurarse de que entienda los procedimientos de la aplicación de esta investigación, incluyendo los riesgos y los beneficios.

PROPÓSITO DEL ESTUDIO:

Esta investigación explorará la aplicación de los cuatro pasos del método Heurístico de Polya, en los Paralelos "A" y "B", el primero será el grupo experimental y el segundo de control en la Unidad Educativa Chordeleg, con el fin de evidenciar las causas que dificultan la resolución de esos problemas y proponer esta estrategia como una alternativa para apoyar en el aprendizaje de la resolución de problemas de relación de recurrencia, en la asignatura de Matemática Superior.

PARTICIPANTES DEL ESTUDIO:

La participación de los estudiantes de estos dos paralelos es de responsabilidad ya que deben cursar la asignatura de Matemática Superior y aprobarla.

Para éste trabajo se tendrá en cuenta que los estudiantes hayan aprobado el segundo año de bachillerato y estén en los cursos de experimentación y de control.

La muestra de estudiantes se definirá de acuerdo a la malla curricular que se oferta en los paralelos que tienen un perfil de salida potenciada en la Matemática.

Se espera también que participe el docente del grupo de control.

PROCEDIMIENTOS:

Para la recolección de información relacionada con este trabajo se solicitará a los estudiantes participar de una encuesta, pretest y postest acerca la aplicación del método de Polya en la resolución de problemas recursivos, donde se pretende establecer las estrategias de aprendizaje implementadas para su desarrollo. Además habrá la participación del docente del grupo de control, al momento de aplicar la observación de su planificación, en el aspecto referido a las estrategias metodológicas.

RIESGOS O INCOMODIDADES:

En este estudio los participantes (estudiantes y docente) podrían sentir algún nivel de ansiedad o presión respecto a su experiencia con el curso, al mismo tiempo que pueden sentir que se vulnera su privacidad, puesto que las preguntas apuntan a sus estrategias de aprendizaje y de enseñanza. Sin embargo, en ningún momento del estudio, se juzgará la pertinencia de las estrategias o herramientas o los resultados obtenidos por los estudiantes al finalizar el proceso.

BENEFICIOS:

Debe quedar claro que usted como representante de la institución no recibirá ningún beneficio económico por autorizar esta investigación. Si no que recibirá una contribución para potenciar el proceso de aprendizaje de las relaciones de recurrencia, lo que apoya al plan de mejora en el campo pedagógico.

PRIVACIDAD Y CONFIDENCIALIDAD:

La información que obtenga la investigadora en los paralelos de tercero de bachillerato "A" y "B" permanecerá en secreto y no será proporcionada a ninguna persona diferente a Usted bajo ninguna circunstancia. A las encuestas test, postest y observación se les asignará un código de tal forma que no se conocerá la identidad de los estudiantes.

Los resultados de esta investigación se la comunicarán debidamente a través de un oficio que se le hará llegar a su despacho.

Debo indicar que se reconocerá la propiedad intelectual, para ser coherente y cumplir con la política de probidad académica que posee la Unidad Educativa Chordeleg.

DERECHO A RETIRARSE DEL ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN:

Si usted firma aceptando la aplicación de esta investigación, recibirá una copia firmada, con el sello de Rectorado de la Unidad Educativa Chordeleg

CONSENTIMIENTO

Mgs. Rómulo Fernando Gómez Romero

____

Nombre del Rector de la Unidad Educativa Chordeleg

CC. 0102223065

____________________________________ Chordeleg 10-21-2016

Firma del Rector Fecha

CC.0102 5

María Lazo Carrera

____

Firma del Investigador

Anexo 2. Consentimiento informado padres de familia

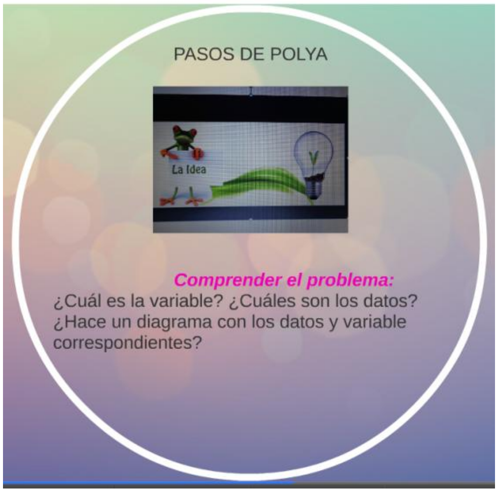
AUTORIZACIÓN DE PADRES DE FAMILIA/TUTORES

Por la presente Yo/nosotros,...Jackeline Elizabeth Pacheco.... Padres/tutores del estudiante.., de la Unidad Educativa Chordeleg, autorizamos la participación de mi/nuestra hijo/a en la aplicación de la investigación sobre el método heurístico de Polya, a llevarse a cabo en el mes de octubre y noviembre venideros, en la misma se aplicará un pretest y postest; esto con el propósito de generar nuevos procesos de aprendizaje en la resolución de problemas de recurrencia.

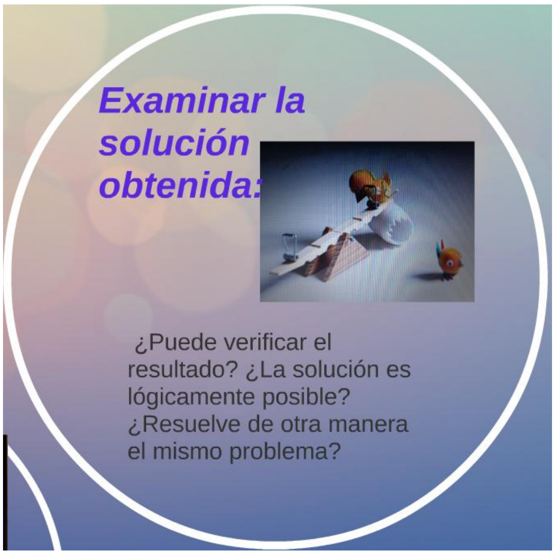
Fecha: Chordeleg, 27 de octubre 2015 Firma:...Jackeline Pacheco...

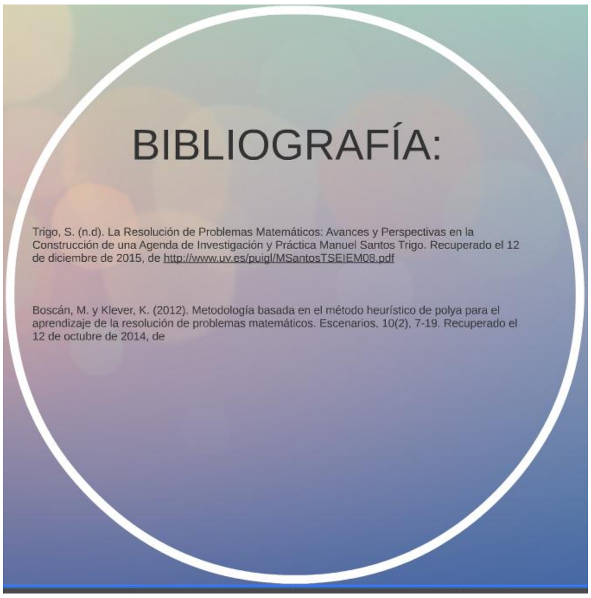
Docente: Mgs. Mercedes Lazo

Anexo 3. Diapositivas en prezzi




Ejecutar el plan:
¿Implementa la idea de solución? ¿Acompaña cada operación matemática con el argumento por que hace y para qué lo hace?


Examinar la solución obtenida:
¿Puede verificar el resultado? ¿La solución es lógicamente posible? ¿Resuelve de otra manera el mismo problema?


BIBLIOGRAFÍA:
Trigo, S. (n.d). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica Manuel Santos Trigo. Recuperado el 12 de diciembre de 2015, de http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf
Boscán, M. y Klever, K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. Escenarios, 10(2), 7-19. Recuperado el 12 de octubre de 2014, de

Anexo 4. Pretest

UNIDAD EDUCATIVA "CHORDELEG"
Dirección: Calle Juan Bautista Cobos s/n Teléfono : 072223280 - 072223381 - 072223520
c07colegiochordelegbi@hotmail.com
CHORDELEG - AZUAY - ECUADOR

Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Maestría en Docencia de las Matemáticas

Maestrante: María Mercedes Lazo Carpio

PRETEST

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN BASE DEL MÉTODO HEURÍSTICO DE POLYA

OBJETIVO: Sondear la estrategia que sigue usted para resolver un problema matemático, a través de la aplicación del pretest, para reorientar la práctica docente en la enseñanza de relaciones de recurrencia

Instrucciones

Estimado/a estudiante

- Lea detenidamente las cuestiones a responder
- Éste pretest me permitirá tener criterios relacionados con la forma de resolver un problema matemático, por ello ruego comedidamente escribir sus datos informativos, cabe indicar que esta información no será difundida de manera individual sino masivamente, a través de datos estadísticos.
- El puntaje obtenido en este pretest no se considerará en el aporte del bloque
- Evite tachones, por ello use lápiz y borrador
- Agradezco su participación y franqueza a la hora de emitir su respuesta.
- El tiempo estimado es de 80 minutos.

NOMBRE:……………………………………….. CURSO:……………..
PARALELO:…………………..

"Daría todo lo que sé, por la mitad de lo que ignoro"
Descartes

UNIDAD EDUCATIVA "CHORDELEG"
Dirección: Calle Juan Bautista Cobos s/n Teléfono : 072223280 - 072223381 - 072223520
c07colegiochordelegbi@hotmail.com
CHORDELEG - AZUAY - ECUADOR

FECHA:…………………DOCENTE:………………………ASIGNATURA:……………

GÉNERO:…………………………… EDAD:……………………………..

"HUIR DE LAS MATEMÁTICAS ES IMPOSIBLE, PUES FORMAN PARTE DE TI MISMO"
ESTRELLA J

RESPONDER A LAS SIGUIENTES PREGUNTAS:

a) ¿Qué es una relación de recurrencia?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

b) Escriba ¿Cuál es la diferencia característica entre una sucesión y una relación de recurrencia?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

c) En cuantas partes se divide un plano al ser cortada por: una, dos, tres rectas

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

"Daría todo lo que sé, por la mitad de lo que ignoro"
Descartes

UNIDAD EDUCATIVA "CHORDELEG"
Dirección: Calle Juan Bautista Cobos s/n Teléfono : 072223280 - 072223381 - 072223520
c07colegiochordelegbi@hotmail.com
CHORDELEG - AZUAY - ECUADOR

RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

d) Una sucesión representa el ahorro de dinero semanal, inicia con 2 dólares y luego se va incrementando 3 dólares a cada semana, de manera que se llega hasta la sexta semana con 20 dólares, ¿Cuál es la cantidad que se ahorrará la siguiente semana?

e) Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética. Sabiendo que el mayor de ellos mide 105°, ¿cuánto miden los otros dos?

f) Resolver la siguiente relación de recurrencia en base de los datos establecidos $a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2}$, condiciones iniciales son $a_0 = 0, a_1 = 1$ y $n \geq 2$

g) Halla una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

Muchas gracias.

"Daría todo lo que sé, por la mitad de lo que ignoro"
Descartes

Anexo 5. Postest

UNIDAD EDUCATIVA "CHORDELEG"
Dirección: Calle Juan Bautista Cobos s/n Teléfono: 072223280 - 072223381 - 072223520
c07colegiochordelegbi@hotmail.com
CHORDELEG - AZUAY - ECUADOR

Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Maestría en Docencia de las Matemáticas

Maestrante: María Mercedes Lazo Carpio

POSTEST

RESOLUCIÓN DE PROBLEMASDE RECURRENCIA EN BASE DEL MÉTODO HEURÍSTICO DE POLYA

OBJETIVO: Determinar el impacto producido por el método de Polya en la resolución de problemas de recurrencia, lo cual reorientará la práctica del docente, en el uso de estrategias para resolver problemas matemáticos, mediante este postest.

Instrucciones

Estimado/a estudiante

- Lea detenidamente las cuestiones a responder
- Éste postest permitirá tener criterios relacionados con la forma de resolver un problema matemático, por ello ruego comedidamente escribir sus datos informativos, cabe indicar que esta información no será difundida de manera individual sino masivamente, a través de datos estadísticos.
- El puntaje obtenido en este postest se considerará en el aporte del bloque
- Evite tachones, por ello use lápiz y borrador
- Agradezco su participación y franqueza a la hora de emitir su respuesta.
- El tiempo estimado es de 60 minutos.

NOMBRE:…………………………………… CURSO:……………. PARALELO:……

FECHA:…………………DOCENTE:……………………….ASIGNATURA:……………

GÉNERO:………………………….. EDAD:……………………………..

"HUIR DE LAS MATEMÁTICAS ES IMPOSIBLE, PUES FORMAN PARTE DE TI MISMO" ESTRELLA J

"Daría todo lo que sé, por la mitad de lo que ignoro"
Descartes

UNIDAD EDUCATIVA "CHORDELEG"
Dirección: Calle Juan Bautista Cobos s/n Teléfono : 072223280 - 072223381 - 072223520
c07colegiochordelegbi@hotmail.com
CHORDELEG - AZUAY - ECUADOR

RESPONDER A LAS SIGUIENTES PREGUNTAS:

a) ¿Defina qué es una sucesión?

……

………………………………………………………………………………

b) ¿Qué es una relación de recurrencia?

……

………………………………………………………………………………

c) Escriba ¿Cuál es la diferencia característica entre una progresión aritmética y una relación de recurrencia?

……

………………………………………………………………………………

d) Escribir el número de regiones en que el plano puede ser dividido por n círculos, de tal manera que cada par se intersecta en exactamente 2 puntos, en tres puntos, en cuatro y cinco puntos y ningún trio se intersecta en un punto.

RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

e) Hallar el término enésimo en 7, 12, 17, 22

f) ¿Qué lugar ocupa un término cuyo valor es 56, en la progresión aritmética definida por el primer término de 8 y diferencia 3?.

"Daría todo lo que sé, por la mitad de lo que ignoro"
Descartes

UNIDAD EDUCATIVA "CHORDELEG"
Dirección: Calle Juan Bautista Cobos s/n Teléfono : 072223280 - 072223381 - 072223520
c07colegiochordelegbi@hotmail.com
CHORDELEG - AZUAY - ECUADOR

g) Una nadadora entrenó todos los días durante tres semanas. El primer día nadó 15 minutos, y cada día nadaba 5 minutos más que el día anterior. ¿Cuánto tiempo nadó el último día? ¿Y a lo largo de las tres semanas?

h) Resolver el siguiente problema de relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Las condiciones iniciales son a_0=1 a_1 = 1 a_2=2. Cuando n≥2

i) Se tienen n discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si n es el número de movimientos que se requieren para hacer esto.

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ Cuando n≥2 y a_0=1 a_2=1

Muchas gracias

"Daría todo lo que sé, por la mitad de lo que ignoro"
Descartes

Anexo 6. Rúbrica variable independiente-método heurístico de Polya

Criterios/ Indicadores	0 problema	1 problema	2 problemas	3 problemas	4 problemas
Identifica los datos del enunciado					
Identifica las variables del enunciado					
Plasma un gráfico acorde al enunciado					
Relaciona los datos y las variables					
Traduce las oraciones del enunciado al lenguaje algebraico					
Vincula los conceptos y habilidades con los conocimientos previos					
Expresa el enunciado del problema de otra manera					

mplea la estrategia planificada para la solución del problema					
Argumenta el uso de los algoritmos en cada operación realizada					
Verifica los resultados					
Analiza si el resultado obtenido es coherente con el enunciado					
Sugiere alternativas diversas para resolver el mismo problema					

Anexo 7. Rúbrica: variable dependiente-resolución de problemas de relación de recurrencia

Criterios/ Indicadores	NO	SI
Vincula los términos que antecede y precede		
Intuye la respuesta de un problema de relación de recurrencia.		
Define lo que es una relación de recurrencia		
Identifica las condiciones iniciales.		
Contrasta entre sucesión y relación de recurrencia.		